MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

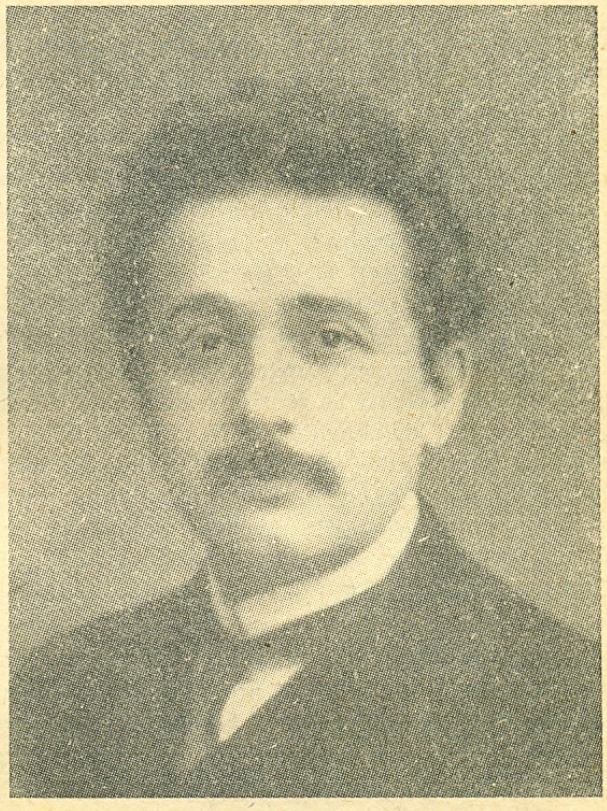
ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA V. BROJ 4 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1954. — 1955.

ALBERT EINSTEIN

1879.—1955.

U Princetonu, u Sjedinjenim Državama Amerike, umro je slavni tvorac teorije relativnosti Albert Einstein.



Godine 1911.

Einsteinova teorija relativnosti nikla je godine 1905. Ona je objasnila negativni ishod glasovitog Michelsonovog eksperimenta (1881), kojim se trebao ustanoviti utjecaj Zemljinog gibanja oko Sunca na brzinu svjetlosti, i time dokazati apsolutno gibanje Zemlje, t. j. gibanje prema »apsolutnom« mirnom prostoru. Očekivanog efekta nije bilo. A to je značilo 1. da je fizikalnim sredstvima uopće (a ne samo mehaničkim) nemoguće konstatirati apsolutno jednoliko gibanje tijela (sustava), nego jedino njegovo relativno gibanje prema drugim tijelima (sustavima); 2. da će eksperimentator, bilo kako se on giba, izmjeriti brzinu svjetlosti u vakuumu uvijek jednako veliku (300000 km/sek). Ta konstantnost brzine svjetlosti bio je sasvim neočekivan rezultat, dotada nepoznata pojava, neobjašnjiva s gledišta stare, t. zv. klasične mehanike. Einstein je oštroumnom analizom, naročito pojma istodobnosti, pokazao, da taj rezultat proizlazi iz neispravnosti naših pojmova o prostoru i vremenu: ne postoji, kako je to tvrdio Newton, »apsolutan« prostor, nepomičan i nezavisan o mehaničkim (fizikalnim) pojavama; ne postoji ni »apsolutno« vrijeme, koje, bez obzira na pojave, teče samo po sebi jednoliko. Prostor i vrijeme, tvrdio je Einstein, ovise o gibanju tijela (sustava): vremenski razmak između dva događaja, što ga satom mjeri eksperimentator, koji miruje s obzirom na te događaje, manji je, negoli isti vremenski razmak, što ga mjeri potpuno jednakim satom eksperimentator, koji se prema tim događajima jednoliko giba. Prema tome, trajanje fizikalne pojave ovisi o gibanju motrioca; ne postoji jedno apsolutno vrijeme za sve motrioce, nego svaki motrilac mjeri trajanje pojave svojim vremenom,

koje ovisi o relativnom gibanju motrioca prema pojavi; vrijeme je, dakle, relativan pojam. Isto tako i prostorne mjere ovise o gibanju tijela: duljine, u smjeru gibanja motrioca, bit će kraće, ako ih mjeri eksperimentator, koji se relativno prema njima giba, nego ako ih mjeri eksperimentator, koji s obzirom na njih miruje. Dakle, i duljine tijela (u smjeru gibanja) ovise o gibanju motrioca, i duljina (prostor) nije apsolutan, nego relativan pojam. Tako je Einstein svojom teorijom oduzeo apsolutnost temeljnim pojmovima o gibanju, prostoru i vrmenu i te pojmove relativirao.

Dalji rezultat Einsteinove teorije bio je taj, da je brzina svjetlosti u vakuumu najveća brzina, što je mogu postići tijela i signali u fizici i prirodi uopće. Odatle, s jedne strane, proizlazi posebno pravilo o zbrajanju brzina dvaju tijela (sustava). Na primjer, kad bi se neki avion gibao prema površini Zemlje brzinom od 225 000 km/sek i ispalio metak u smjeru svog gibanja s brzinom također od 225 000 km/sek (prema avionu), tad metak prema Zemlji ne bi imao brzinu 450 000 km/sek, kao što izlazi po pravilu zbrajanja brzina u klasičnoj mehanici, nego brzinu manju od brzine svjetlosti, koja se određuje Einsteinovim pravilom o zbrajanju brzina i iznosi u ovom slučaju samo 288 000 km/sek. S druge pak strane, iz spomenute činjenice da je brzina svjetlosti najveća brzina, koju tijela mogu postići, izlazi neposredno, da svako tijelo pri dostizavanju brzine svjetlosti mora pružati neizmjerno velik otpor daljem ubrzavanju, a to znači, da mu tada masa postaje neizmjerno velika. Prema tome, masa tijela nije konstantna, kao što to uzima klasična mehanika, nego raste s brzinom tijela. To je danas i potvrđeno na vrlo brzim česticama u atomskoj fizici.

Svi ti rezultati Einsteinove teorije zamjetljivi su tek pri gibanjima tijela s brzinama, koje se približuju brzini svjetlosti. Takva gibanja imamo danas u području atomske fizike. Za brzine vrlo malene prema brzini svjetlosti, kakve su sve brzine u svakidašnjem životu, Einsteinova dinamika prelazi u klasičnu dinamiku, pa zato ni ne zamjećujemo efekte iz teorije relativnosti u našem svakidašnjem životu. Odatle se vidi pronicavost i dalekovidnost Einsteinova duha, koji je teorijskim putem došao do otkrića čitavog niza pojava, koje u to doba ili uopće nisu bile poznate, ili su bile jedva poznate našem iskustvu.

No najznamenitiji rezultat teorije relativnosti jest otkriće, da i energija ima masu, odnosno, da je svaka masa razmjerno golem rezervoar »zgusnute« ili »zaleđene« energije. Energija E i masa m vezane su formulom $E = mc^2$, gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu. Ispravnost te formule provjerena je danas na svakom koraku u fizici atomske jezgre, pri pretvaranju elemenata, kojom prilikom se razmjerno neznatan dio mase jezgara oslobodi, prema gornjoj formuli, u razmjerno golemu energiju (atomska energija u reaktorima i bombama). Na primjer, kad bi se oslobodila sva energija jednog lista papira od 1 grama, tad lako iz gornje formule izračunamo, da bi ta energija iznosila 9.10^{20} erga, a to je energija, što je dobivamo iz otprilike 200 vagona prvoklasnog ugljena.

Einstein je svoju specijalnu teoriju relativnosti, koja se odnosila samo na razmatranja o tijelima (sustavima), što se među sobom (relativno) gibaju jednoliko, proširio godine 1916. i na tijela (sustave), koja se gibaju ubrzano. Uvidjevši prvi, da se mehaničke pojave u sustavu, koji se giba jednoliko-ubrzano ponašaju potpuno ekvivalentno (jednako) kao u sustavu, koji nije podvrgnut ubrzanom gibanju, ali se zato nalazi u jednom gravitacionom polju, Einstein je pokazao, da to vrijedi ne samo za mehaničke pojave, nego i za sve fizikalne pojave uopće. To je sadržaj njegovog principa ekvivalentnosti. Prema tome, ne da se ni s pomoću ubrzanih gibanja dokazati apsolutno gibanje, jer ne znamo, da li se nalazimo unutar ubrzanog sustava, ili se neubrzan sustav nalazi u kakvom gravitacionom polju. Tom općom teorijeom relativnosti Einstein je ujedno ukazao na duboke veze, koje postoje između prostora i gravitacije.[1]

[1] Na Einsteinove radove, naročito na njegovu teoriju relativnosti, osvrnut ćemo se slijedeće školske godine našem listu. — *Ur.*

Ali Einstein je presudnim otkrićima zahvatio i u druga područja fizike. Godine 1905., iste godine kada je objavio svoju specijalnu teoriju relativnosti, uspio je objasniti fotoelektrični efekt, postavivši hipotezu, da se svjetlost rasprostire u neke vrsti česticama, prozvanim fotoni. To otkriće imalo je izuzetno značenje za razvitak kvantne fizike (atomske fizike), pa je upravo za ovo otkriće, a ne za teoriju relativnosti, Einstein dobio godine 1921. Nobelovu nagradu za fiziku. Iste godine 1905. Einstein je objavio i treće veliko otkriće, našavši formulu za Brownovo gibanje, kojom se iz kvadrata srednjeg pomaka jedne promatrane čestice, a koji se eksperimentalno dade odrediti, može dobiti Avogadrov broj molekula u jednom molu. Ispravnost Einsteinove formule bila je eksperimentalno potvrđena.

Povrh ovih najvećih otkrića Einstein je mnogim značajnim radovima unapredio razne grane fizike.

Albert Einstein rođen je godine 1879. u Ulmu, u Württembergu u Njemačkoj, Djetinjstvo je proveo u Münchenu, gdje mu je otac imao elektrokemijsku radnju. Kad je Albertu bilo petnaest godina, preselio je otac u Milano (Italija), a Albert je uskoro zatim prešao na Tehničku visoku školu u Zürichu u Švicarskoj, da studira fiziku i matematiku. Završivši studije, dobije mjesto u Patentnom uredu u Bernu. Na tom se mjestu nalazio, kad je kao 26-godišnjak objavio godine 1905. redom svoje tri znamenite radnje, od kojih mu je svaka pojedina donijela slavu. Godine 1909 postao je profesor sveučilišta u Zürichu, zatim u Pragu (1910—1912), pa opet u Zürichu, otkuda su ga krajem godine 1913. pozvala dva znamenita njemačka fizičara Planck i Nernst na sveučilište u Berlinu. Tu je Einstein ostao 20 godina, sve do dolaska nacista na vlast, koji su mu zaplijenili svu njegovu imovinu i lišili svih njegovih funkcija. Tada se preselio u Ameriku i prihvatio poziv da bude direktor Instituta za visoki studij u Princentonu, gdje je ostao do kraja svog života 18. IV. 1955., premda je već prije napustio mjesto direktora Instituta.

Ime Einsteinovo ostat će, kao jedno od najsvjetlijih u povijesti fizike, trajno vezano za dvije najveće i najrevolucionarnije fizikalne teorije posljednjih stoljeća: za teoriju relativnosti, koju je sam Einstein stvorio, i za kvantnu teoriju, koju je utemeljio Max Planck, a Einstein izvanredno unapredio.

Kao čovjeku, Einsteinu pripada slava, da je sav svoj golemi autoritet uvijek zalagao za slobodu i napredak svih naroda.

A. KURELEC

O neeuklidskim geometrijama*

DANILO BLANUŠA, Zagreb

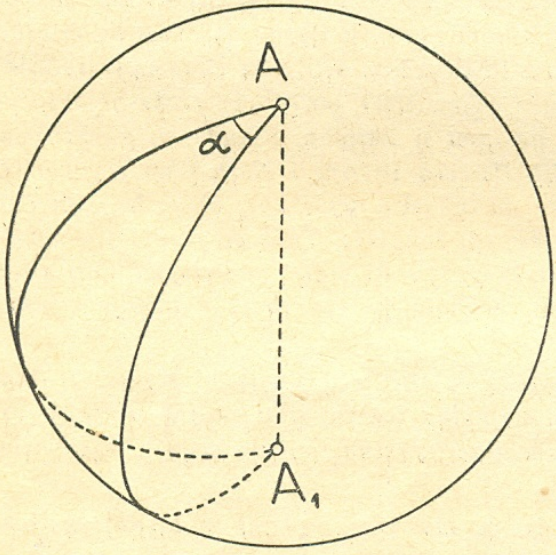
Već je kod starih Grka nauka o geometrijskim tvorevinama bila visoko razvijena. Sustavan prikaz tih geometrijskih saznanja dao je *Euklid* (živio je oko 300. god. pr. n. e.) u svojim »Elementima«, pa se po njemu ta nauka zove »euklidska geometrija«. Euklid je svu geometriju sazidao na nekim osnovnim stavcima, koji se zovu »postulati« i »aksiomi«. Iz njih je logičkim zaključivanjem dobio obilje raznih poučaka, od kojih se mnogi i danas izlažu u srednjoj školi.

Ograničimo li se na proučavanje geometrijskih tvorevina u ravnini, govorit ćemo o ravninskoj euklidskoj geometriji, za razliku od prostorne euklidske geometrije, koja se bavi geometrijskim tvorevinama u prostoru. U ravninskoj geometriji

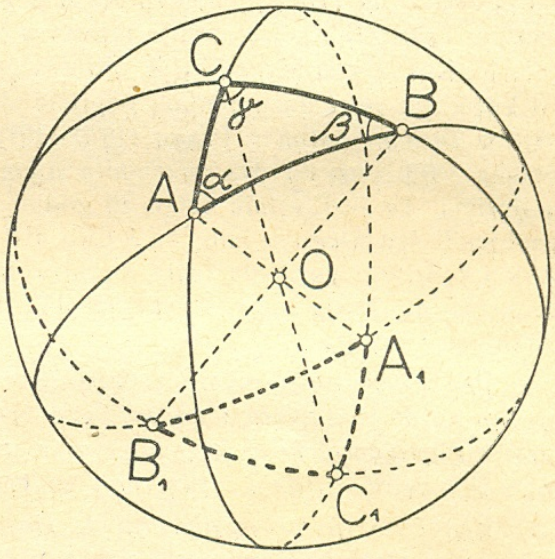
* Po želji mnogih učenika najviših razreda donosimo prikaz o neeuklidskim geometrijama, koji će izlaziti više nastavaka.

radi se o svojstvima raznih likova i krivulja, kao što su na pr. trokut, pravac, kružnica, elipsa i t. d. U prostoru poučavamo plohe i tjelesa, kao kuglu, elipsoid, piramidu, kocku i t. d. No može se pitanje postaviti i nešto drukčije. Zašto ne bismo odabrali neku plohu, na pr. kuglinu plohu, pa na njoj proučavali likove i krivulje, kao što to inače činimo u ravnini? Dobili bismo tako geometriju na toj plohi, koja bi sigurno bila drukčija nego geometrija u ravnini. Jedno i drugo je geometrija na dvodimenzionalnoj tvorevini, no jedamput je ta tvorevina ravnina, drugi puta, recimo, kuglina ploha. Dok smo onu prvu geometriju nazivali euklidskom, sada ćemo dobiti neku drugu geometriju, koja dakle više ne će biti euklidska.

Pokušajmo naći neke karakteristične razlike između geometrije u ravnini i geometrije na kugli, koju još zovemo sfernom geometrijom, jer se kugla prema grčkom zove i sfera. Zadamo li tri točke u ravnini i spojimo ih najkraćim spojnicama — t. j. dijelovima pravaca — dobivamo trokut. Znamo, da je zbroj kutova u takvu trokutu uvijek 180^0 ili, u lučnoj mjeri, π. Uzmimo sada tri točke na kugli, pa ih spojimo



Sl. 1.



Sl. 2.

najkraćim spojnicama na toj plohi. Te će spojnice biti lukovi glavnih kružnica, t. j. kružnicâ, kojima je središte u središtu kugle. Dobivamo tako opet trokut, koji se zove »sferni trokut«, i pitamo, kolik je zbroj kutova u takvu sfernom trokutu. Da to odredimo, provest ćemo malo razmatranje.

Neka su na kugli nacrtane dvije glavne polukružnice, koje se sastaju u dvjema dijametralno suprotnim ili »antipodnim« točkama A i A_1 (sl. 1). Na mjestu, gdje se sastaju, te crte zatvaraju neki kut α. To je ujedno kut, koji zatvaraju ravnine tih dviju polukružnica. Presječnica tih ravnina je pravac, koji spaja točke A, A_1. Možemo reći, da takve dvije glavne polukružnice čine dvokut, kojemu su te polukružnice stranice, a antipodne točke vrhovi. Ako je jedna polukružnica čvrsta, a druga se postepeno okreće oko promjera, koji spaja antipodne točke, mijenjat će se kut α, a isto tako i površina toga dvokuta. Očigledno je, da će, recimo, dvostrukom kutu α odgovarati i dvostruka površina pripadnog dvokuta, trostrukom kutu trostruka površina i t. d., drugim riječima, površina P_α dvokuta je razmjerna ili proporcionalna s kutom α. Vrijedi dakle

$$P_\alpha = K\alpha \tag{1}$$

gdje je K konstanta proporcionalnosti. Da tu konstantu odredimo, dovoljno je zamišljati, da je kut α postao puni kut, t. j. 360^0 ili, ako ga mjerimo u lučnoj mjeri, dakle u radijanima, da je jednak 2π. No dvokut je sada obuhvatio svu kuglinu plohu, a njena površina je $4r^2\pi$. Izlazi dakle

$$4r^2\pi = K \cdot 2\pi, \text{ t. j. } K = 2r^2 \tag{2}$$

Dobili smo tako, da je površina P_α takva dvokuta

$$P_\alpha = 2r^2\alpha, \tag{3}$$

gdje je r polumjer kugle, a α kut dvokuta u lučnoj mjeri.

Pokušajmo sada odrediti površinu nekog sfernog trokuta ABC (sl. 2), kojemu su zadani kutovi α, β, γ u lučnoj mjeri. U slici su nacrtane glavne kružnice, koje se dobivaju produljivanjem stranica trokuta ABC. One se sijeku u antipodnim točkama A_1, B_1, C_1, koje su vrhovi antipodnog trokuta. Promatrajmo na pr. dvokut, koji odgovara kutu α. Taj se dvokut počinje kod vrha A, obuhvaća trokut ABC, zatim jedan dalji dio kugline plohe, i završava se kod točke A_1. No dalje možemo uočiti i njemu jednaki dvokut, koji odgovara vršnom kutu α. I taj se dvokut počinje kod A, ali se prostire na suprotnu stranu, obuhvaća antipodni trokut $A_1B_1C_1$ i svršava se opet kod A_1. Analogno lako nalazimo dva dvokuta s kutom β i njemu vršnim kutom i dva s kutom γ i njemu vršnim kutom. Vidimo, da tih 6 dvokuta prekriva čitavu površinu kugle, no sam trokut ABC je prekriven trostruko, jer je sadržan u tri takva dvokuta, a i antipodni trokut je trostruko prekriven. Da su trokuti prekriveni samo jednostruko, bio bi zbroj površina tih dvokuta upravo jednak površini kugle. No ovako taj zbroj sadržava još dodatno po dvije površine trokuta ABC i trokuta $A_1B_1C_1$. Površina trokuta ABC očito je jednaka površini trokuta $A_1B_1C_1$, jer su takvi antipodni trokuta sukladni. Doduše, oni nisu sukladni u užem smislu, t. j. tako, da bi se pomicanjem po kuglinoj plohi mogli dovesti do pokrivanja, slično kao što se to ne može učiniti sa dva aksijalno simetrična ravninska raznostranična trokuta. No svakako su takva dva trokuta (ravninska ili sferna) iste površine, jer se mogu rastaviti svaki u tri istokračna trokuta spajanjem vrhova sa središtem opisane kružnice, a od dobivenih 6 istokračnih trokuta po dva su sukladna u užem smislu. Ako je središte opisane kružnice izvan trokuta, trokut se dobiva oduzimanjem jednog takvog istokračnog trokuta od zbroja drugih dvaju. Izlazi dakle konačno, da je zbroj površina svih dvokuta jednak površini kugle povećanoj za 4 površine trokuta, ili, ako površinu trokuta označima sa P, a površine dvokuta sa P_α, P_β, P_γ,

$$2P_\alpha + 2P_\beta + 2P_\gamma = 4r^2\pi + 4P_t \tag{4}$$

Zbog (3) možemo to pisati ovako:

$$4r^2\alpha + 4r^2\beta + 4r^2\gamma = 4r^2\pi + 4P_t. \tag{5}$$

Iz toga je dalje

$$P_t = r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi). \tag{6}$$

Izraz u zagradi se zove sferni eksces (t. j. suvišak), jer kaže, za koliko je zbroj kutova trokuta veći od π (ili, u kutnoj mjeri, od 180^0), t. j. veći od zbroja kutova svakog ravninskog trokuta. Time smo dakle doveli u vezu sferni eksces s površinom sfernog trokuta. Vidimo, da zbroj kutova u sfernom trokutu premašuje π to više, što je površina trokuta veća. Povećanje zbroja kutova iznad π razmjerno je površini trokuta. Označimo li eksces sa ε, t. j.

$$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-\pi, \tag{7}$$

onda je dakle ε proporcionalno s površinom P :

(8) $$\varepsilon = kP_t$$

Na temelju jednadžbe (6) vidimo, da je faktor proporcionalnosti

$$k = \frac{1}{r^2}.$$

Taj faktor k zovemo Gaussovom zakrivljenošću plohe. [*C. F. Gauss* (1777—1855) udario je temelje modernoj teoriji ploha.] Vidi se, da je zakrivljenost to veća, što je polumjer kugle manji.

Postoje plohe, za koje vrijedi proporcionalnost (8), a da to nisu kugle. Do takvih ploha možemo doći, ako jedan dio kugline plohe, koji možemo zamisliti izrađen od tankog lima, bilo kako savijemo, a da lim pri tom niti kidamo, niti rastežemo. Čitava se kugla ne može savijati bez kidanja ili rastezanja (odnosno stezanja), ali se mogu savijati na izvjestan način njeni dijelovi. I kod takvih se ploha konstanta proporcionalnosti k u jednadžbi (8) zove (Gaussova) zakrivljenost plohe, a odnosi se na trokute dobivene spajanjem triju točaka najkraćim spojnicama na dotičnoj plohi. Takve se najkraće spojnice na nekoj plohi zovu geodetske linije, pa se prema tome i trokuti, kojima su stranice geodetske linije, zovu geodetski trokuti.

Ima ploha, kao na pr. površina jajeta, na kojima je doduše zbroj kutova geodetskih trokuta uvijek veći od π, ali ne vrijedi proporcionalnosti (8). Načinimo li na takvoj plohi za razne geodetske trokute kvocijent ekscesa i površine trokuta i nazovemo ga, recimo, sa q, dakle

(10) $$q = \frac{\varepsilon}{P_t},$$

onda taj kvocijent q ne će biti konstanta kao na kugli, već će za različite trokute biti različit. Zamislimo li sada, da se neki trokut smanjuje sve više, tako da se postepeno steže na odabranu točku na plohi, kvocijent q će se mijenjati i približavati nekoj graničnoj vrijednosti k, koju ćemo zvati Gaussovom zakrivljenošću plohe u toj točki. Može se dokazati, da se dolazi do iste te vrijednosti, ma kakav oblik imali trokuti, koji se stežu na tu točku. No ta će vrijednost biti drukčija, ako odaberemo drugu točku, prema kojoj se trokuti stežu. To znači, da je Gaussova zakrivljenost promjenljiva na toj plohi, t. j. različita je, već prema tome, gdje se na toj plohi nalazimo. Vidimo sada: ako vrijedi proporcionalnost (8) na cijeloj plohi, onda je na njoj Gaussova zakrivljenost konstantna. No može se dokazati i obrnuto: ako je Gaussova zakrivljenost konstantna t. j. ako se q približava uvijek istoj vrijednosti k, ma gdje na plohi mi izvršili stezanje trokuta na jednu točku, onda vrijedi (8), t. j. sve su te vrijednosti q uopće uvijek iste i jednake toj jednoj vrijednosti k, za sve geodetske trokute na plohi.

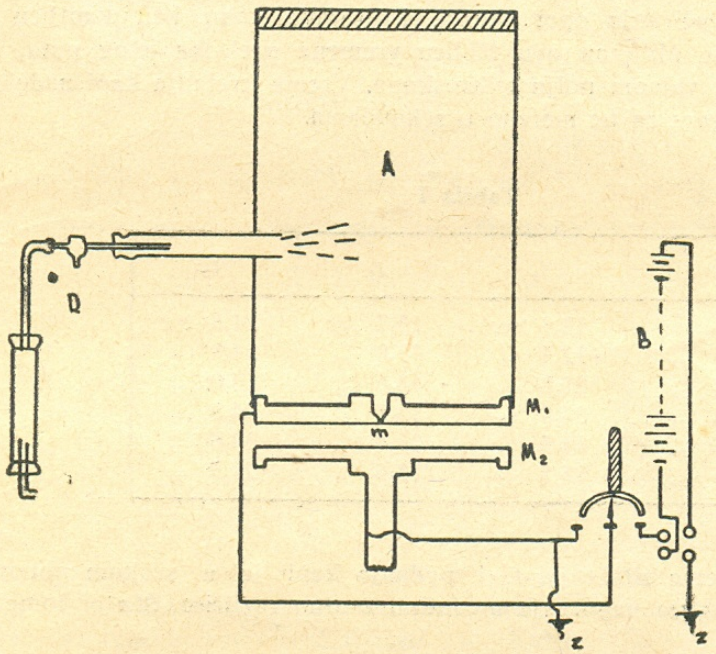
Obuhvatimo li, što smo dosada raspravili, vidimo, da ima ploha, na kojima geodetski trokuti imaju zbroj kutova veći od π. No na njima Gaussova zakrivljenost može biti promjenljiva. Ako je konstantna, onda vrijedi proporcionalnost (8) i dobivamo geometriju, kakva vrijedi na kuglinoj plohi. Ako je pak $k = 0$, dakle $\varepsilon = 0$ onda smo prešli na specijalni slučaj ravninske, dakle euklidske geometrije. Možemo zamisliti, da stojimo na kugli, kojoj polumjer sve više raste. Dio kugline plohe oko nas sve više će naličiti na ravninu, kao na pr. površina Zemlje. U jednadžbi (9) polumjer r teži prema neizmjerno, dakle k prema nuli, pa će za neki trokut zadane površine prema (8) težiti i ε prema nuli. No to znači, da će zbroj kutova biti sve bliže jednak π, t. j. približavamo se odnosima u euklidskoj geometriji, koju tako dobivamo kao granični slučaj sferne geometrije. U euklidskoj geometriji je dakle Gaussova zakrivljenost jednaka nuli.

Znameniti Millikanov ogled koji dokazuje atomizam elektriciteta

MIRA JOVANOVIĆ, Beograd

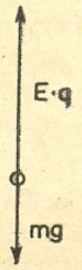
Kad posmatramo vodu u čaši, izgleda nam potpuno neverovatno da je i ona, kao sve materije uopšte, izgrađena od zasebnih zrnaca (molekula, atoma itd.), toliko je na izgled celovita, neprekidna, kontinuirana. No da je ipak i voda, kao i svaka druga materija zrnaste, atomističke građe, nauka je pouzdano utvrdila.

Izgleda uopšte da je mnogošta u prirodi kvantizirano, tj. izdeljeno na zasebne male količine, koje pretstavljaju celine za sebe. Zato su fizičari već davno pretpostavili da bi i elektricitet (za koji se dugo nije znalo šta je upravo) mogao biti takođe atomističke prirode, t j. da je možda takođe izdeljen u određene količine, koje su dalje nedeljive, ali koje se mogu brojno nagomilavati i pretstavljati tako veći ili manji električni »naboj« tela.



Sl. 1.

R = raspršivač $M_1 M_2$ = ploče kondenzatora
m = mali otvor za prolaz kapljice B = baterija
z = zemljovod



Sl. 2.

Ova pretpostavka, koja je za modernu fiziku od ogromnog značaja, našla je svoj eksperimentalni dokaz u ogledima Millikana, američkog fizičara, koji je te svoje oglede objavio u knjizi »Elektron, njegova izolacija i merenje«, Čikago 1917*. Donećemo ovde opis tih ogleda. I to, ne samo zato što oni dokazuju atomizam elektriciteta, nego i zato što su jedan lep primer moderne eksprimentalne metode, kojom fizika prodire u tajne prirode, u srž materije, i saznaje zbivanja nedostupna direktnom posmatranju. Ovakvi ogledi daju odgovor onima koji pitaju: otkuda možemo sa sigurnošću govoriti o takvim stvarima kao molekul, atom, elektron, kada nikad

*) Novo izdanje (iz god. 1947) te Millikanove knjige, potpuno prerađeno i nadopunjeno novim tekovinama moderne atomske fizike, prevedeno je i kod nas i izišlo u 2 sveska pod naslovom „Elektroni“ (Prosveta, Beograd 1948./9.), — *Ur.*

nećemo biti u mogućnosti da ih vidimo ili da se na drugi način neposredno uverimo o njima.

Millikan je izveo svoje oglede ovako. Upotrebio je vrlo sitne kapljice ulja (prečnik kapi 10^{-4} cm), koje je pomoću raspršivača ubacivao u komoru A (slika 1). Na dnu komore nalazio se mali otvor, kroz koji je mogla proći samo po jedna kapljica. Kapljica bi, pošto padne kroz taj otvor, stizala u jedan prostor između dve paralelne horizontalne ploče električnog kondenzatora, od kojih znamo da je jedna pozitivna a druga negativna, kada se kondenzator naelektriše. Kapljicu osvetljavaju jaki svetlosni izvori, tako da ona izgleda kao svetla tačka na crnoj pozadini, kad se posmatra kroz mikroskop, naročito postavljen kroz zid kondenzatora. Kako se ponaša kapljica u električnom polju? Treba imati u vidu da skoro svaka kap ovamo već stiže naelektrisana, jer se u raspršivaču usled trenja naelektrisala. Dok kondnzator još nije naelektrisan, kapljica usled svoje težine lagano pada, i to *stalnom brzinom zbog otpora vazduha*. Međutim, ako se ploče kondenzatora uključe na bateriju, i ako je gornja ploča suprotno naelektrisana kapi, kap počinje da se kreće polako prema gore, takođe opet stalnom brzinom. Pri isključenju električnog polja kap se zaustavlja i kreće nadole, pri uključivanju opet nagore. Prošetavši tako istu kapljicu mnogo puta gore-dole, dobio je Millikan ovu tablicu vremena prelaska istog puta, koji je omeđen sa dva zareza u vidnom polju mikroskopa. Vreme kretanja kapi nadole označeno je sa t_1, vreme nagore sa t_2; mereno u sekundama.

Tabela I

t_1	t_2	t_1	t_2
13,6 *sec*	12,5 *sec*	13,7 *sec*	34,6 *sec*
13,8 „	12,4 „	13,8 „	34,8 „
13,4 „	21,8 „	13,6 „	16,0 „
13,4 „	34,8 „	13,5 „	34,8 „
13,6 „	84,5 „	13,4 „	34,6 „
13,6 „	85,5 „	13,6 „	21,9 „

Kao što vidimo, vreme silaženja, t. j. padanja kapi je u svakom ponovljenom ogledu isto. Vreme kretanja nagore je međutim, znatno različito. Šta bi tome mogao biti razlog?

Razmislimo o uzrocima ovih kretanja. Kad nema električnog polja, kap prosto pada usled svoje težine (mg). Kad je u električnom polju, deluje na kap rezultanta dveju sila: električne sile i težine. Električnu silu izrazićemo produktom Eq, gde je E jačina polja, t.j. sila na jedinicu el. naboja, a q naboj kapljice izražen u elektrostatičkim jedinicama *CGSE*. Ta rezultanta dakle, koja je uzrok kretanja nagore, iznosi $Eq - mg$ (Sl. 2).

Ova rezultanta očigledno nije ista u svim ponovljenim slučajevima. Što bi kod nje moglo biti promenljivo? Pošto su veličine: E, m, g stalne (E stalno, jer ne menjamo napon baterije), ostaje u pitanju samo veličina q, t.j. naboj kapljice. Moramo pretpostaviti dakle da se ovaj naboj menja. A usled čega? Za fizičare koji se bave mikrofizikom ova pojava nije zagonetna. Millikan je odmah zaključio da kapljica pri svom kretanju kaptira (t.j. privuče i veže za sebe) suprotne električne jone vazduha, i to prema slučaju: jedan, dva ili više jona, usled čega se delimično neutrališe njen prvobitni naboj i tako menja. Sa promenom naboja menja se i sila koja kapljicu kreće, a srazmerno sili menja se i brzina kretanja.

Različite brzine kapi nisu dakle zagonetne i značaj Millikanovog ogleda nije u objašnjenju ove pojave. Značajno je drugo nešto što se u gornjoj prostoj tablici otkriva. Prvo što pada u oči je to, da promene brzine (nagore) nisu male i postupne, nego se dešavaju u nekim skokovima. U gornjoj tablici doduše nisu unesene brzine, nego vremena kretanja, ali se odatle brzine mogu lako izračunati. Učinimo to, i formirajmo iz toga novu tablicu.

Tabela II.

Brzine	Razlike brzina	
$\left(\frac{\text{put}}{\text{vreme}}\right)$ $\frac{0{,}5222}{21{,}5}$ *cm/sec* = 0,02390 *cm/sec*	0,00885	= 1 × 0,008 . . . .
$\frac{0{,}5222}{34{,}7}$ „ = 0,01505 „		
$\frac{0{,}5222}{85{,}0}$ „ = 0,00614 „	0,00891	= 1 × 0,008 . . . .
$\frac{0{,}5222}{16}$ „ = 0,03264 „	0,02650	= 3 × 0,00883 . . . .
$\frac{0{,}5222}{34{,}7}$ „ = 0,01505 „	0,01759	= 2 × 0,00880 . . . .
		itd.

0,5222 cm je put kapljice u vidnom polju mikroskopa. Put podeljen vremenom daje brzinu. U drugu rubriku unesimo razlike, promene ovih brzina. Sad posmatrajmo: Te promene su najčešće iste: 0,008 cm/sec. U drugom slučaju su ili dvaput veće, ili triput veće, uvek umnožak osnovne razlike sa celim brojem, nikad s razlomkom. Šta iz ovog važnog zapažanja izlazi?

Izlazi ovo: Pošto znamo da se promene brzine događaju usled promene električnog naboja kapi, jasno je da se i promene naboja događaju takođe na isti taj kvantizirani način. Usput privučeni joni imaju, znači, ili najčešće isti kvantum naboja, ili dvaput toliki, triput toliki, n-put toliki, itd. nikad polovinu, trećinu, ili neki deo njegov. Ovaj osnovni naboj može se smatrati, dakle, elementarnim električnim nabojem ili elementarnom količinom elektriciteta koja se u prirodi javlja, »atomom elektriciteta« kao što savremeni fizičari rado kažu.

Millikan je svoje oglede ponovio nekoliko hiljada puta i dobio uvek isti rezultat, t.j. da se je promena brzine kapi desila kao umnožak osnovne promene sa celim brojem; a nikad se ta osnovna promena nije smanjila na polovinu, trećinu ili tako nešto. Pretpostavka o atomizmu elektriciteta je dakle Millikanovim ogledom jasno potvrđena i dokazana, i to kao što vidimo na jedan način veoma prost i pristupačan.

Kako je Millikan na istom ovom prostom ogledu izračunao *koliki* je upravo taj elementarni naboj?

Da bi izračunao koliki je elementarni kvantum elektriciteta, Millikan je morao svoje oglede da izvodi sa velikom preciznošću merenja. Ne samo vreme kretanja kapi nadole i nagore moralo je biti tačno izmereno, nego i težina kapi morala je biti poznata. Jer rekli smo već da je sila koja pokreće kapljicu nagore rezultanta težine mg i električne sile Eq (gde E znači jačinu polja t.j. silu na jedinicu naboja, a q znači naboj kapljice). Kad kap pada, pokreće je samo sila mg i ona se zbog trenja kreće uniformno brzinom v_1, pa je u tom slučaju brzina srazmjerna sili, a kad se kreće na gore, onda deluje na nju rezultanta $Eq - mg$ i kap dobija uniformnu brzinu v_2.

Pošto su te brzine srazmjerne silama, imamo proporciju:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{Eq - mg}{mg} \qquad (1)$$

U ovoj proporciji poznate su veličine v_1 i v_2, zatim E, t.j. jačina polja, jer se ova izračuna kao količnik iz napona baterije i otstojanja kondenzatorskih ploča; g znamo da je 981 *cm/sek*². Ostaju kao nepoznate samo masa m i električni naboj kapi q.

Određivanje mase kapi pretstavljala je najveći problem i teškoću pri izvođenju ogleda. Moguće je ipak bilo i ovo izvesti na osnovu poznavanja Stokesovog zakona (1845 god.), po kome brzina v padanja neke kugle sa radiusom a i sa gustinom δ, koja pada kroz materijalnu sredinu gustine δ i gde je unutrašnji koeficient trenja η, iznosi $v = \frac{2}{9}\frac{ga^2(\varrho - \varrho')}{\eta}$. Podešavajući ogled dakle tako da materijal kapljice i materijal sredine budu po svojim osobinama (ϱ, ϱ' η) tačno poznati, moglo se iz poznate brzine v izračunati nepoznati radius a kapi. Čim je pak poznat radius odnosno i volumen, a zna se i gustina, masa se izračuna $m = \varrho \cdot V$. Ostala je još nepoznata veličina q, naboj kapljice. Ova veličina međutim nije od značaja i može se matematički eliminisati, kao što ćemo videti. Značajan je naboj jona koji pridolaze, jer je taj naboj često baš elementarni kvant elektriciteta. Ako sa v_3 označimo novu brzinu koju je kap dobila usled kaptiranja jona, sa njegovim elementarnim nabojem e, onda važi proporcija:

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{E(q - e) - mg}{mg} \qquad (2)$$

t.j. opet se brzine odnose kao sile (a e oduzimamo od q zato, jer se naboj kapi neutralisao za toliko, koliko iziosi naboj jona e. Da bi se sad oslobodili veličine q oduzmimo od jednačine (2) jednačinu (1) te dobijemo:

$$\frac{v_3 - v_2}{v_1} = \frac{-Ee}{mg}$$

gdje je sve poznato — osim e. A to je baš ono što se upravo traži.

Dobivši sve druge veličine tačnim merenjem, Millikan je sad izračunao ovo e, t.j. elementarni kvant naboja i dobio da iznosi:

$$e = 4{,}768 \cdot 10^{-10} \text{ elektrostat. jedinica.}$$

Ovaj su iznos dobili posle Millikan-a i neki drugi fizičari na sasvim drugim ogledima.

Verovatno niko neće pomisliti: »Pa osnovnu količinu imali smo već u elekrostat. jedinici, kojom se i sam Millikan služio da izmeri, odnosno odredi, količinu elektriciteta.« Mislim da je jasno svima da je ova jedinica teorijski postavljena, naime izvedena iz osnovnih jedinica *CGS* sistema *cm*, *g*, *sec*. Njena definicija glasi: to je ona količina elektriciteta koja na isto toliku, udaljenu 1 cm, deluje silom od jednog dina. Ali javlja li se upravo tolika količina elektriciteta u prirodi magde ili ma-kada? Ne. Elektricitet se javlja, kao što smo videli ili u količini $4{,}768 \cdot 10^{-10}$ el. stat. jedinica ili u celovitom umnošku te količine. Današnja vrednost, postignuta usavršenim aparatima, jest $4{,}802 \cdot 10^{-10}$ el. st. jed. odnosno točno: $e = (1{,}60186 \pm 0{,}00001) \cdot 10^{-19}$ *kulona*. Prema tome ovu količinu možemo smatrati prirodnom jedinicom elektriciteta za razliku od el. statičke jedinice, koja je teorijska i proizvoljno postavljena. (Proizvoljno zato, jer su osnovne jedinice *cm*, *g*, *sec.*, iz kojih je izvedena, proizvoljne). Ovoj prirodnoj jedinici elektriciteta dato je ime elektron, što je predložio fizičar Stony godine 1891. Predlog je prihvaćen i reč elektron za čitav niz godina označavala je samo to, odnosno upravo to: prirodnu jedinicu elektriciteta (bilo negativnog, bilo pozitivnog).

Tek kasnije, oko 1913 i dalje, prodiranjem nauke u građu materije, pod elektronom počeo se podrazumevati delić atoma koji taj električni naboj sobom nosi. Ovo značenje reč elektron ima i danas.

Na kraju svega ovog može se nekom učiniti, da je naučno eksperimentisanje veoma zabavan i lak posao, sličan igri, koji uz malo matematike dovodi do sjajnih otkrića. Preterano bi bilo ovako misliti. Naučno istraživanje je doista vrlo zanimljiv rad za onoga ko ima zato naklonosti, volje i sposobnosti. Ali ne treba zaboraviti da je taj rad vezan sa beskrajnom strpljivošću i istrajnošću, tako da se time uspešno može baviti samo onaj ko je te osobine kod sebe dovoljno razvio. Pripremajte se dakle u tome smislu, budući mladi istraživači, da biste postigli uspeh!

O trouglu čija je jedna visina aritmetička sredina ostale dve

STANKO PRVANOVIĆ, Beograd

Neka su: a, b, c merni brojevi stranica BC, AC, AB trougla ABC; h_a, h_b, h_c merni brojevi trouglovih visina povučenih, respektivno, iz temena A, B, C. Ispitajmo trougao ABC pod uslovom

$$h_a = \frac{1}{2}(h_b + h_c) \tag{1}$$

1. Iz $ah_a = bh_b = ch_c = 2p$, gde je p površina trougla, sledi

$$h_a = \frac{2p}{a}, \quad h_b = \frac{2p}{b}, \quad h_c = \frac{2p}{c}.$$

Smenom tih vrednosti u (1) dobivamo vezu između stranica

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \tag{2}$$

Prema tome, ako je jedna visina trougla aritmetička sredina ostale dve, odgovarajuća stranica je *harmoniska sredina** ostale dve.

2. Pretpostavimo da je $b > c$, što niukoliko ne smanjuje opštost rasuđivanja. Tada iz jednakosti (2), koja se može napisati i u obliku

$$a = \frac{2bc}{b + c} \tag{2'}$$

i poznatog uslova $b - c < a < b + c$ za egzistenciju ΔABC, sledi

$$b^2 - c^2 < 2bc < (b + c)^2. \tag{3}$$

Nejednakost $2bc < (b + c)^2$ tj. $0 < b^2 + c^2$ zadovoljava svaki trougao.
Nejednakost $b^2 - c^2 < 2bc$ tj. $c^2 + 2bc - b^2 > 0$ možemo napisati u obliku

$$c^2 + 2bc + b^2 - 2b^2 > 0,$$

$$(b + c)^2 - 2b^2 = (b + c + b\sqrt{2})(b + c - b\sqrt{2}) > 0.$$

Odatle sledi $b + c - b\sqrt{2} > 0$ (Zašto?),

tj. $$c > (\sqrt{2} - 1)b.$$

Prema tome, ΔABC je moguć kad je zadovoljen uslov

$$(\sqrt{2} - 1)b < c < b. \tag{4}$$

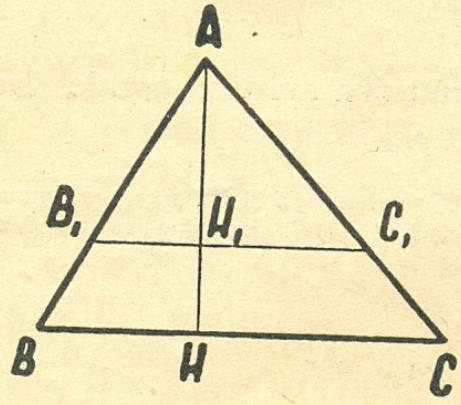
3. Pretpostavimo da je $b = c$. Iz (2') tada dobivamo $a = b$, pa je trougao jednakostraničan.

* Jednakost (2) definiše broj a kao harmonisku sredinu brojeva b i c.

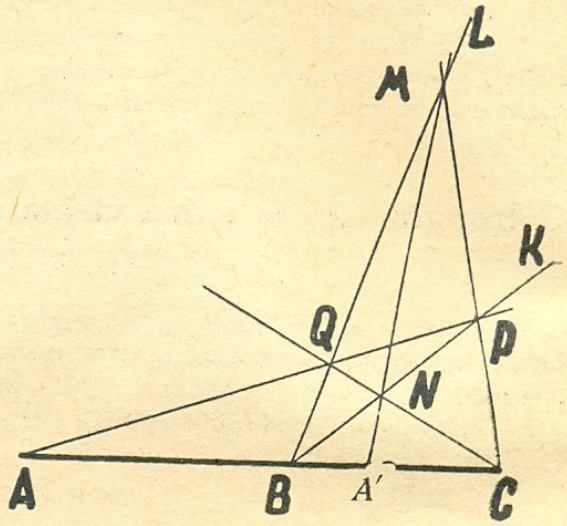
Ako je $a = b$ opet iz (2′) dobivamo $b = c$, pa je trougao ponovo jednakostraničan.

4. Trougao koji zadovoljava uslov (1) može se konstruisati: a) kad su date visine povučene iz B i C; b) kad su date stranice AC i AB.

a) Kad su date visine BH' i CH'', povučene iz B i C, visina AH, povučena iz A, konstruiše se po formuli (1). A tada iz



Sl. 1.



Sl. 2.

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

sledi

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}},$$

pa je traženi trougao sličan trouglu čiji su merni brojevi stranica $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$.

Otuda, konstruiše se ΔAB_1C_1 čije su stranice $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$, povuče se njegova visina AH_1 i na njen nosač, počev od A, prenese se AH. Samim tim su određena i temena B i C traženog trougla.

Neka čitalac pokaže, analogno onome pod 2, da ako je $h_b < h_c$ mora biti zadovoljen uslov

$$(\sqrt{2} - 1)\, h_c < h_b < h_c$$

pa da se ΔABC može konstruisati.

b) Kad su date stranice AC i AB, dovoljno je, za konstrukciju ΔABC, konstruisati treću stranicu BC. A ona se može konstruisati: ili, po formuli (2′), kao četvrtu proporcionalu duži $2AC$, AB i $AB + AC$; ili kao harmonisku sredinu duži AB i AC.

Pokažimo kako se ovo drugo radi. Povuče se proizvoljna poluprava sa početkom u A. Na nju, počev od A, prenesu se date stranice AC i AB. Iz B se povuku dve proizvoljne poluprave BK i BL. Iz A se povuče proizvoljna poluprava koja BK i BL seče, respektivno, u P i Q. Prave CP i CQ seku BL i BK, respektivno, u M i N. Prava MN seče AC u A' i AA' je tražena stranica. Dokaz ove konstrukcije ne spada u srednjoškolski nastavni program.

Neki primeri primene kombinatorike u srednjoškolskom kursu algebre

MIRKO STOJAKOVIĆ, Novi Sad

U članku „Neki primeri primene kombinatorike u srednjoškolskom kursu geometrije“ (Matem. fiz. list, N° 4—5, Zagreb, 1953) rekao sam: „Premda se kombinatorika kao posebna matematička disciplina u srednjo-školskom programu ne predviđa, ipak se ona, barem kao metoda, koristi u izvođenju nekih stavova geometrije i algebre“. U pomenutom članku bili su dati primeri takvog izvođenja u geometriji. Sada ćemo ta izlaganja dopuniti daljim primerima prvenstveno iz algebre.

I° Uzevši u obzir izraze „zbir“, „razlika“, „proizvod“, „količnik“, „stepen“, „koren“, „logaritam“ — *koliko se izraza od po 2 gornja izraza*, kao što su na primer izrazi „zbir logaritama„ ili „stepen zbira“ i slično — *može, ukupno, načiniti?*

Ovo je u stvari jedan od osnovnih problema kombinatorike: napraviti sve kombinacije od po 2 elementa uzeta iz skupa od 7 elemenata dopuštajući ponavljanje elemenata i uzimajući u obzir i poredak elemenata. Rešenje se može dati pregledno u obliku tabele:

	ZBIR	RAZLIKA	PROIZVOD	KOLIČNIK	STEPEN	KOREN	LOGARITAM
ZBIR	$(a+b)+(c+d)$	$(a-b)+(c-d)$	$ab+cd$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	a^n+b^m	$\sqrt[n]{a}+\sqrt[m]{b}$	$\log a+\log b$
RAZLIKA	$(a+b)-(c+d)$	$(a-b)-(c-d)$	$ab-cd$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$	a^n-b^m	$\sqrt[n]{a}-\sqrt[m]{b}$	$\log a-\log b$
PROIZVOD	$(a+b)(c+d)$	$(a-b)(c-d)$	$(ab)(cd)$	$(a:b)(c:d)$	$a^n b^m$	$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{b}$	$\log a \log b$
KOLIČNIK	$\frac{a+b}{c+d}$	$\frac{a-b}{c-d}$	$\frac{ab}{cd}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$	$a^n:b^m$	$\sqrt[n]{a}:\sqrt[m]{b}$	$\frac{\log a}{\log b}$
STEPEN	$(a+b)^n$	$(a-b)^n$	$(ab)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$	$(a^n)^m$	$(\sqrt[n]{a})^m$	$(\log a)^n$
KOREN	$\sqrt[n]{a+b}$	$\sqrt[n]{a-b}$	$\sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\sqrt[n]{\log a}$
LOGARITAM	$\log(a+b)$	$\log(a-b)$	$\log(ab)$	$\log\frac{a}{b}$	$\log(a)^n$	$\log\sqrt[n]{a}$	$\log(\log a)$

Ova tabela ima $49 = 7^2$ polja od kojih svako zastupa po jednu traženu kombinaciju. Ovo znači da u algebri ima ukupno 49 mogućih kombinacija od po dve računske operacije. Korisno je o svakoj od njih položiti sebi računa: tada postižemo sigurnost da ni jedan algebarski izraz koji treba transformirati neće sadržati operacije koje ne bismo znali izvršiti. Bez obzira na komplikovanost algebarskog izraza, čim u njemu dolazi samo konačno mnogo operacija, ove se redom dve po dve mogu izvršiti i izraz na taj način prevesti na oblik koji se traži.

U opštem slučaju broj kombinacija od po k elemenata uzetih iz niza od n elemenata *sa ponavljanjem* i *s obzirom na poredak* elemenata iznosi

$$\boxed{n^k}$$

2. Rešimo jednačinu $x^8 - 1 = 0.$

Najpre je $x^8 = (x^4)^2 = 1$ odatle $x^4 = \pm 1,$

dalje je $x^2 = \pm\sqrt{\pm 1},$

i najzad $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm 1}}.$

Koliko korena je *ovde zapisano?* Očevidno jedan koren dobija se kad se na tri mesta gde dolazi znak $\pm$ izabere po volji jedan od ta dva znaka. Broj korena jednak je tada broju

mogućih ovakvih izbora. Problem je znači u tome da se od dva elementa $+$, $-$ naprave kombinacije od po tri elementa s ponavljanjem i s obzirom na poredak. Prema prednjem tih kombinacija ima $2^3 = 8$. Jednačina $x^8 - 1 = 0$ ima dakle 8 korena.

3. Polinom *prvog* stepena sa jednom promenljivom ima *dva* člana, polinom *drugog* stepena sa *jednom* promenljivom ima *tri* člana a sa *dve* promenljive *6* članova. *Koliko članova ima opšti polinom n-tog stepena sa k promenljivih?*

Polinom n-tog stepena sa jednom promenljivom ima $(n+1)$ članova

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Pomnožimo li sve ove članove drugom promenljivom y tako da svi članovi budu n-tog stepena dobićemo članove n-tog stepena polinoma sa *dve* promenljive. Ovih dakle ima

$$(n+1).$$

Slično tome članova $(n-1)$-og stepena biće n, članova $(n-2)$-og stepena biće $(n-1)$ itd, članova drugog stepena biće 3, članova prvog stepena 2 i jedan nezavisni član. Ukupno će biti

$$S(2,n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{1\cdot 2} = \binom{n+2}{2} \text{ članova.}$$

Za $n = 2$ odavde izlazi $S(2,2) = 6$ kao što smo već naveli.

Pokažimo da polinom n-tog stepena sa *tri* promenljive ima

$$S(3,n) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{n+3}{3} \text{ članova.}$$

Ako svih $\binom{n+2}{2}$ članova jednog polinoma n-tog stepena sa *dve* promenljive, pomnožimo trećom promenljivom tako da svi članovi budu n-tog stepena biće svega $\binom{n+2}{2}$ članova n-tog stepena u polinomu sa *tri* promenljive. Uopšte, kao što je lako uvideti, jedan polinom n-tog stepena sa $(k+1)$ promenljivih ima onoliko članova m-tog stepena koliko polinom m-tog stepena sa k promenljivih ima svih članova uopšte. To znači da će polinom sa tri promenljive imati

$\binom{n+1}{2}$ članova $(n-1)$-og stepena

$\binom{n}{2}$ članova $(n-2)$-og stepena itd.

. . . . . .

$\binom{4}{2}$ članova 2-og stepena

$\binom{3}{2}$ članova 1-og stepena

$\binom{2}{2}$ članova nultog stepena (nezavisni član)

Svega ima dakle

$$S(3,n) = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{3}$$

članova sa tri promenljive. Za dokaz gornje veze primetimo da je

$$\binom{k+3}{3} - \binom{k+2}{3} = \binom{k+2}{2}$$

za svako $k = 0, 1, 2\ldots$ što se neposredno izračunava, pa ako se takve jednakosti napišu za $k = 0, 1, 2, \ldots n$ i saberu dobija se navedeni rezultat.

Slično se da pokazati da opšti polinom n-tog stepena sa k promenljivih ima

$$\boxed{\binom{n+k}{k}}$$

članova. Ovaj dokaz ostavlja se za vežbu.

4. Neki prirodni broj (ili polinom) Q rastavljen je na proste činitelje $q_1, q_2, \ldots, q_k$ od kojih se svaki javlja po redu sa stepenima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ to jest

$$Q = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha k}$$

Koliko delitelja ima ovaj broj (odnosno polinom)?

Kako je Q deljivo svakim od brojeva $q_1^{\beta_1}, q_2^{\beta_2}, \ldots, q_k^{\beta k}$ gde nenegativni celi brojevi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ po redu nisu veći od $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ i to nezavisno jedan od drugoga to ima ukupno

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots . (\alpha_k + 1)$$

delitelja broja Q gde je uključen i delitelj 1 kao i sam izraz Q. U ovom slučaju trebalo je da nađemo broj kombinacija od po k elemenata uzetih iz k grupa od kojih svaka ima po redu $\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_k + 1$ elemenata iz *svake grupe po 1 bez obzira na poredak.* Broj takvih kombinacija jednak je proizvodu svih brojeva koji kazuju koliko elemenata ima koja grupa.

Tako polinom

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x-1)^3 (x+1)^2$$

ima ukupno $4 \cdot 3 = 12$ delitelja. To su

$$1,\ x-1,\ (x-1)^2,\ (x-1)^3,\ (x+1),\ (x+1)^2,\ (x-1)(x+1),\ (x-1)^2(x+1),$$
$$(x-1)^3(x+1),\ (x-1)(x+1)^2,\ (x-1)^2(x+1)^2,\ Q$$

5. Kaže se da je neka funkcija od više promenljivih *simetrična* po tim promenljivima ako ta funkcija ne menja vrednost kad se promenljive ma kako međusobno drugačije razmeste. Tako je $x + y$ simetrična funkcija po x, y jer je $x + y \equiv y + x$. Isto tako simetrične su funkcije $xyz + x + y + z$, $sin(xy + yz + zx)$ i to po x, y, z itd. Koliko u simetričnoj funkciji od n promenljivih ima različitih razmeštaja promenljivih?

Neka je broj tih razmeštaja $P_{(n)}$.

Svaka funkcija od *jedne* promenljive je simetrična. Ima samo jedan razmeštaj:

$$P_{(1)} = 1.$$

Simetrična funkcija od *dve* promenljive (x, y) dopušta *dva* razmeštaja promenljivih (x, y) i (y, x) te je

$$P_{(2)} = 2.$$

Simetrična funkcija od *tri* promenljive dopušta *6* razmeštaja promenljivih: (x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, y, x), (z, x, y), te je

$$P_{(3)} = 6 = 3P_{(2)}$$

itd. Slično tome simetrična funkcija od n promenljivih dopušta

$$P_{(n)} = nP(n-1)$$

razmeštaja pošto iza svake od n promenljivih uzete na prvom mestu mogu da slede $P(n-1)$ razmeštaja ostalih $(n-1)$ promenljivih. Ako se sve ove jednakosti međusobno pomnože dobija se

$$P_{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$$

ili kako se to kraće piše

$$P_{(n)} = n!$$

znak $n!$ čita se „n faktorijel“).

6. Svaka od kružnih funkcija *sin, cos, tg, cotg, sec, cosec,* nekog ugla α može se izraziti pomoću koje bilo druge kružne funkcije istog ugla α. Koliko obrazaca ima kojima se to izražavanje može postići?

Od 6 elemenata *sin, cos, tg, cotg, sec, cosec* treba izabrati ma koja 2 bez ponavljanja a s obzirom na poredak. Koliko bude takvih izbora toliko će biti i obrazaca. Na primer izboru (*sin, tg*) odgovara obrazac

$$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}},$$

a izboru (*tg*, *sin*) obrazac

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}.$$

Očevidno ima $6 \cdot 5 = 30$ takvih obrazaca.

U opštem slučaju broj izbora k elemenata iz niza od n elemenata *s obzirom* na poredak i *bez ponavljanja* dat je obrascem

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$$

7. Neka veličina A određena je kad se znaju ma koja 3 od 5 podataka a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Koliko može biti načina da se veličina A odredi pomoću 3 od navedenih podataka. Očevidno ima toliko načina koliko načina ima da se iz niza od 5 elemenata uzme 3 elementa bez ponavljanja i bez obzira na poredak. Takvih izbora ima u ovom slučaju

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

U opštem slučaju broj izbora k elemenata iz niza od n elemenata *bez* ponavljanja i *bez* obzira na poredak iznosi

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{n-k+1}{k}$$

što smo napred, kao i u prethodnom članku, beležili sa

$$\boxed{\binom{n}{k}}$$

(i čitali sa „n nad k“).

U pojedinim primerima *opšti* obrasci navedeni su bez dokaza. Dokazivanje ispravnosti tih obrazaca u opštem slučaju ostavlja se za vežbu. Jedan zajednički metod za proveravanje te ispravnosti jeste tzv. „zaključak od k na $k+1$“. *Neposredno* se proveri ispravnost tvrđenja za $k = 1$, *pretpostavi* se njegova ispravnost za $k = n$ i *dokaže* ispravnost za $k = n + 1$. Primeri ovakvog zaključivanja mogu biti dati u posebnom članku.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

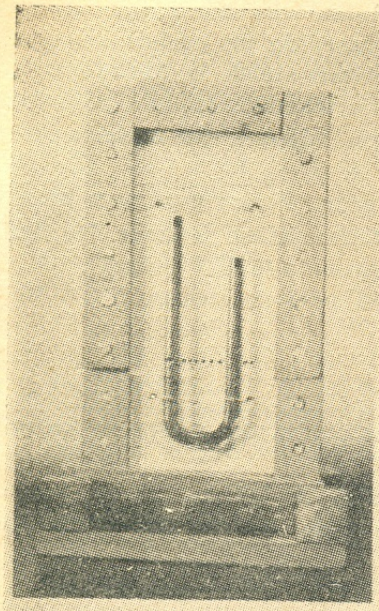
Nekoliko eksperimenata za naše najmlađe

U gradivo trećeg razreda gimnazije spada mehanika. Ova me grana fizike vrlo zanima, pa sam odlučio vršiti kod kuće neke pokuse i mjerenja. Radio sam prema knjižici Varićak - Vernić: Praktične vježbe iz fizike za srednje škole.

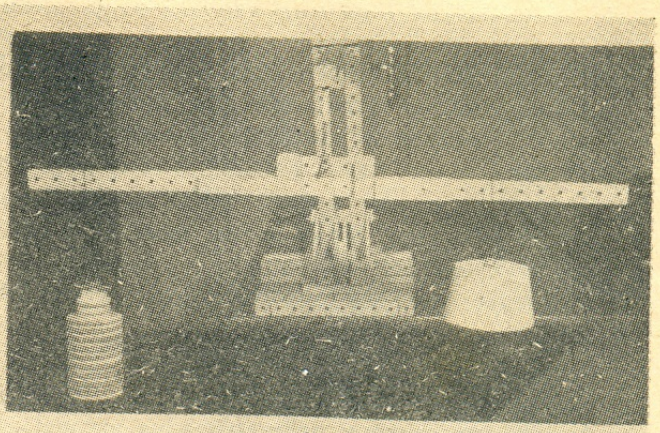
Kako nisam imao potrebne stalke za pokuse, sastavio sam ih iz konstruktivnih igračaka. Matador i Stabil (Jugodor, Konstruktor, Märklin). Neke ću stalke i pokuse opisati.

1. ODREĐIVANJE GUSTOĆE TEKUĆINE POMOĆU U-CIJEVI
(Varićak - Vernić, vježba 11)

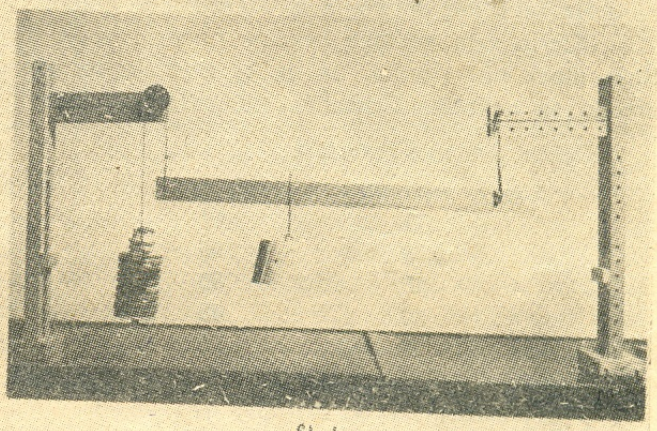
Iz ravne staklene cijevi promjera 3 mm izradio sam na plamenu U-cijev. Pričvrstio sam je na stalak, koji sam sastavio iz Matadora. Na stalak sam pričvrstio komad milimetarskog papira, da bih mogao točno čitati razine tekućina (sl. 1).



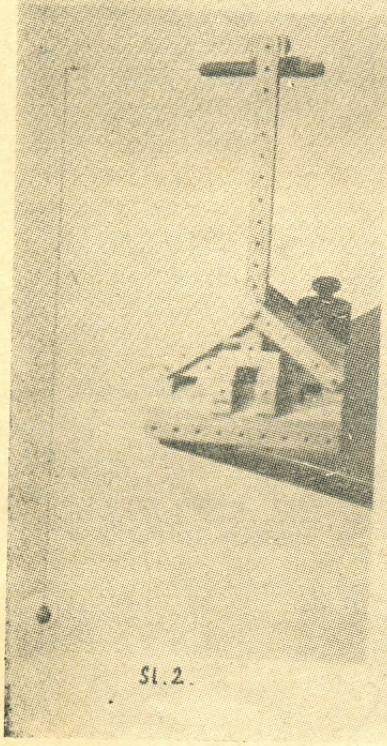
Sl. 1.



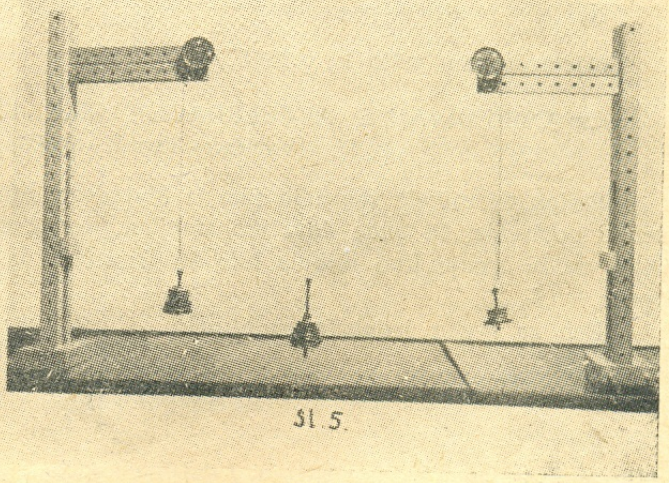
Sl. 3.



Sl. 4.



Sl. 2.



Sl. 5.

Sl. 1. Određivanje gustoće tekućina pomoću U-cijevi. U lijevom kraku cijevi nalazi se tekućina manje gustoće (q_2). **Sl. 2.** Određivanje akceleracije sile teže pomoću njihala. Sl. 3. Određivanje veličine nepoznate sile pomoću dvostruke poluge. Sl. 4. Određivanje veličine nepoznate sile pomoću jednostrane poluge. Sl. 5. Slaganje paralelograma sila.

Stalak sam postavio vodoravno pomoću libele, koju sam također sam načinio. Ravnu staklenu cijev sam na plamenu sasvim malo savinuo, a krajeve cijevi sam izvukao u kapilare. Zatim sam cijev napunio vodom, ali sam u njoj ostavio mali mje-

hurić zraka. Nakon toga sam kapilare na plamenu zatalio. Oko cijevi sam navukao gumenu cijev, na kojoj sam u sredini izrezao oblik elipse, da mi posluži kao znak za vodoravni položaj. Libelu sam pričvrstio na jednostavan stalak iz Matadora.

Da uzmognemo izvršiti mjerenja, moramo uzeti dvije tekućine, jednu s poznatom, a drugu s nepoznatom gustoćom. Tekućine se ne smiju miješati, pa možemo uzeti na pr. vodu i benzin, ksilol, petrolej ili ulje, vodu i živu ili sl.

U U-cijev nalijemo najprije tekućinu s većom gustoćom. Prema poznatom pravilu o spojenim posudama, bit će razine tekućine u obim kracima cijevi jednake. No kada u jedan krak U-cijevi nalijemo drugu tekućinu, ne će razine više biti jednake.

Nepoznatu gustoću tekućine q_2 lako ćemo odrediti pomoću izraza:

$$q_2 = \frac{h_1 q_1}{h_2},$$

ako h_1 i h_2 izmjerimo u milimetrima na milimetarskom papiru od mjesta na kojemu se dvije tekućine dotiču, a q_1 izrazimo u g/cm³.

Mjerio sam gustoću benzina pomoću vode, koju sam obojadisao plavom bojom. Boja mora biti rijetka, da ne bi utjecala na gustoću vode. Benzin sam obojadisao crveno sa nekoliko kristalića elementarnog joda.

Dobio sam ove rezultate:

h_1 mm	h_2 mm	q_1 g/cm³	q_2 g/cm³
43	61	1	0,7
73	106	1	0,69
57	85	1	0,67
30	45	1	0,66
39	55	1	0,71

Najveća apsolutna pogreška $[\Delta q_2] = 0{,}03\ g/cm^3$.

Prava vrijednost: $q_2 = 0{,}68 \pm 0{,}03\ g/cm^3$.

Najveća relativna pogreška: $\frac{|\Delta q_2|}{q_2} = \frac{0{,}03}{0{,}68} = 0{,}04 = 4\%$.

Mjerenja sam vršio kod 18° C.

2 ODREĐIVANJE AKCELERACIJE SILE TEŽE POMOĆU NJIHALA
(Varićak - Vernić, vježba 18)

Stalak za njihalo sagradio sam iz Matadora. Stalak mora biti čvrst i mora imati veliko podnožje, da bude dovoljno stabilan. Konac njihala sam objesio preko oštrice noža, da bi trenje kod njihala bilo što manje i da bi se laganije izmjerila duljina konca l_0 (Sl. 2).

Kao za svako jednostavno njihalo, vrijedi i ovdje izraz

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je T vrijeme jednog titraja, l duljina konca, a g akceleracija sile teže.

g se može naći iz izraza:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\ cm/sek^2 \qquad 1)$$

gdje duljinu konca l mjerimo od noža do kugle plus polumjer kugle.

Kut, pod kojim se njihalo njiše, mora biti malen, jer izraz 1) vrijedi samo za amplitude od 4—6°.

Njihalo sam stavio u gibanje, ali sam pazio, da gibanje bude pravilno i da se kugla ne okreće oko svoje osi. Izmjerio sam duljinu titraja tako, da sam izmjerio pomoću zapornog sata vrijeme od 100 titraja i dobivenu vrijednost podijelio sa 100. g sam odredio iz izraza 1).

100 T sek.	T sek.	2 r cm	r cm	l_0 cm	l cm	g cm/sek²
174,4	1,744	1,65	0,825	76,3	77,125	1005,029
165	1,65	1,65	0,825	68,3	69,125	1003,13
160,5	1,605	1,65	0,825	64,5	65,325	1001,26
176	1,76	1,65	0,825	77,4	78,225	995,954
171	1,71	1,65	0,825	73,8	74,625	1000,555
166,1	1,661	1,65	0,825	68,8	69,625	984,404

Najveća apsolutna pogreška $|\Delta| = 23{,}364\ cm/sek^2$.

Prava vrijednost: $g = 998{,}388 \pm 23{,}364\ cm/sek^2$.

Najveća relativna pogreška: $\frac{|\Delta g|}{g} = \frac{23{,}364}{981{,}665} = 0{,}0238 = 2{,}38\,\%$.

3. ODREĐIVANJE VELIČINE NEPOZNATE SILE POMOĆU POLUGE
(Varićak - Vernić 14)

Kao stalak za dvostranu polugu (Sl. 3) upotrebio sam stalak njihala, samo sam mjesto noža pričvrstio prečku Matadora. Polugu sam također sastavio iz te igračke. Rupice Matadora su udaljene jedna od druge 2 cm, tako da sam lako mogao odrediti udaljenost utega od objesišta. Stalak sam radi veće stabilnosti opteretio utegom od 1 kg. Polugu sam na stalak objesio pomoću žičane kuke i mjedene osovine, koju sam turpijom izbrusio u trokutasti oblik, da bi trenje što manje utjecalo na rezultat. Poluga mora bez opterećenja visiti horizontalno; u tu svrhu sam objesište smjestio iznad njezinog težišta. U pomanjkanju baždarenih utega možemo umjesto njih upotrebiti nekoliko kotača Matadora, nanizanih na osovinu. Prije upotrebe moramo takve pomoćne utege točno izvagati. Utege sam pomoću končane omče objesio na polugu.

Ravnoteža će biti uspostavljena, kada su statički momenti obiju sila jednaki. Iz izraza:

$$F_2 = \frac{F_1 k_1}{k_2}, \qquad 1)$$

možemo odrediti veličinu nepoznate sile, ako krakove k_1 i k_2 izmjerimo u centimetrima od objesišta do mjesta, na kojemu su obješeni utezi, a veličinu poznate sile F_1 u gramima.

Veličinu nepoznate sile možemo odrediti i pomoću jednostrane poluge (Sl. 4). Kao polugu sam upotrebio ravnalo 50 *cm* dugo. Za to mjerenje potrebna su 2 stalka s objesištem i nepomičnom koloturom. Stalke sam sastavio iz Matadora. Kao koloturnik uzeo sam kotač Stabila, pa sam ga gvozdenom osovinom pričvrstio na stalak. Ravnalo sam pričvrstio na objesište pomoću već opisane trobridne osovine i žičane kuke. Preko koloture sam prebacio konac namazan parafinom te sam ga pričvrstio na ravnalo. Budući da i ova poluga mora neopterećena stajati horizontalno, to sam na konac preko koloture objesio uteg odgovarajuće težine. Iz izraza 1) sam odredio veličinu sile F_2.

a) Rezultati mjerenja pomoću dvostrane poluge:

F_1 g*	k_1 cm	k_2 cm	F_2 g*
225	13,8	20	158
225	22	29,8	165
225	22,3	30,3	163,1
225	27	36	168
225	25	35	160,6

Najveća apsolutna pogreška $|\Delta F_2| = 5{,}06\ g^*$
Prava vrijednost: $F_2 = 162{,}94 \pm 5{,}06\ g^*$

Najveća relativna pogreška: $\frac{|\Delta F_2|}{F_2} = \frac{5{,}06\ g^*}{162{,}94\ g^*} = 0{,}031 = 3{,}1\%$.

b) Rezultati mjerenja pomoću jednostrane poluge:

$F_1\ g^*$	$k_1\ cm$	$k_2\ cm$	$F_2\ g^*$
225	39,6	54,5	163
225	38,2	51,3	167,5
225	36	49	165,4
225	38	51,5	166

Najveća apsolutia pogreška: $|\Delta F_2| = 2{,}273\ g^*$
Prava vrijednost: $F_2 = 165{,}475 \pm 2{,}273\ g^*$

Najveća relativna pogreška: $\frac{|\Delta F_2|}{F_2} = \frac{2{,}273\ g^*}{165{,}475\ g^*} = 0{,}015 = 1{,}5\%$.

4. SLAGANJE PARALELOGRAMA SILA
(Varićak-Vernić, vježba 15)

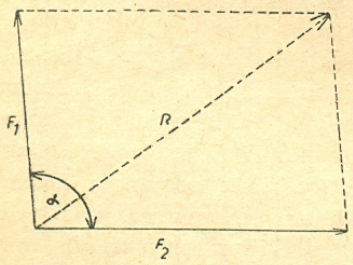
Za ovu vježbu upotrebio sam iste stalke, koje sam naprijed opisao kod određivanja nepoznate sile s pomoću jednostrane poluge. Umjesto objesišta pričvrstio sam i na drugom stalku koloturu (Sl. 5). Kao utege upotrebio sam metalne kotače Stabila, nanizane na osovinu. Pomoću takvih utega mogao sam mijenjati veličine sila, dodavajući ili oduzimajući pojedine kotače. Prije mjerenja sam utege točno izvagao. Upotrebio sam običan konac, namazan parafinom, radi što manjeg trenja. Što su utezi veći, to će pogreška mjerenja biti manja, jer će trenje manje djelovati na rezultat.

Ako na materijalnu točku M djeluju dvije sile F_1 i F_2 pod kutom α, imade rezultanta tih sila (R') veličinu i smjer dijagonale paralelograma, koji konstruiramo s vektorima tih sila kao stranicama u omjeru $F_1 : F_2$.

Preko koloture sam objesio utege F_1 i F_2, čiju sam rezultantu (R') želio odrediti a kut α sam izmjerio kutomjerom.

Da provjerim zakon paralelograma sila, nacrtao sam paralelogram sila, koji se sastoji od elemenata mjerenja (Sl. 6).

Veličina rezultante R mora biti jednaka veličini utega R' mjerena istim jedinicama, kojima smo crtali komponente F_1 i F_2.



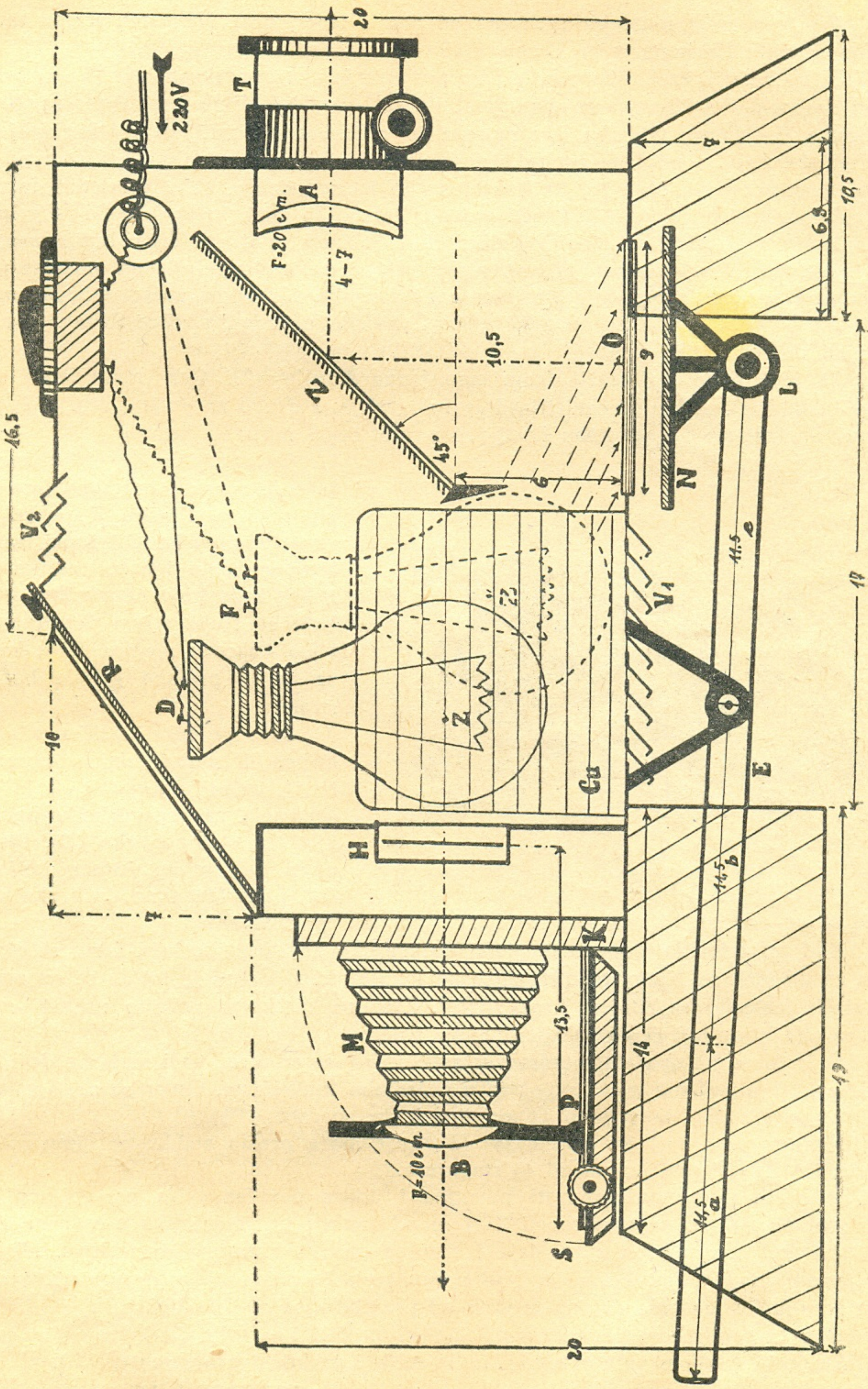
Sl. 6. Paralelogram sila. $F_1 = 29\ g^*$, $F_2 = 40\ g^*$, $\alpha = 95^0$, $R = 46\ g^*$

$F_1\ g^*$	$F_2\ g^*$	α_0	$R\ g^*$ (pokusom)	$R\ g^*$ (grafički)
29	40	115	38	38
29	40	75	52	55
29	40	65	57	57
29	40	90	57	56
29	40	125	40	30
29	40	95	46	46

ANTE VERONA,
učenik III.c razreda
Klasična gimnazija, Zagreb

Kako možemo sami izraditi epidiaskop

Znamo, da je epidiaskop projekcioni aparat, koji vrši službu dia- i epi-projekcije, t. j. njime se vrše reprodukcije prozirnih i neprozirnih fotografija. Takav aparat možemo i sami sastaviti (Sl. 1.).

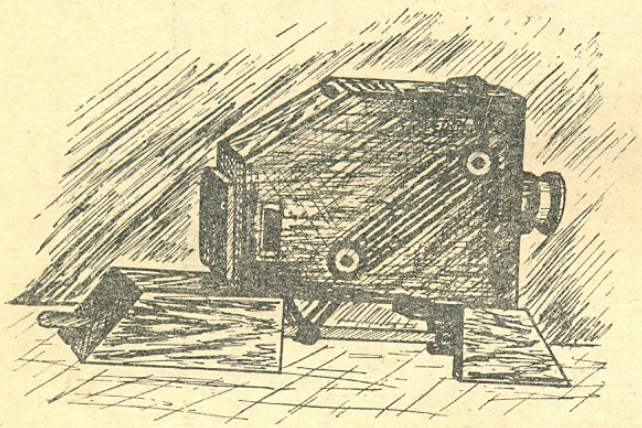

20
T
220V
A
F=20 cm.
4-7
46,5
V2
N
45°
10,5
O
9
6
L
N
7
6,8
10,5
F
D
R
Z
Z'
Gu
V1
11,5
e
E
17
10
7
H
K
13,5
14
11,5
b
19
M
P
B
F=10 cm.
S
11,5
a
20

Sl. 1.

Kutija aparata može biti izrađena od drveta (šperploča). Na jednu stranu smjestimo dijelove episkopa, a na drugu dijelove diaskopa.

Kao objektiv za episkop može nam poslužiti konkavkonveksna leća (A) sa žarišnom daljinom F = 20 cm, a za diaskop je dobra i plankonveksna leća (B) sa žarišnom daljinom F = 10 cm. Obje se leće moraju po rubovima zasloniti, da bi time izbjegli sfernu aberaciju. Radi laganog rukovanja, leće moramo smjestiti na priručan način. Usto moramo paziti i na to, da aparat s tim lećama dobije neku prikladnu formu. Tako ćemo leću episkopa (A) staviti u jedan tubus (T) od kakvog projekcionog aparata, kojim možemo urediti oštrinu slike. Kod diaskopa upotrebit ćemo kutiju neupotrebivog fotografskog aparata (*K*) sa mijehom(*M*) i dvostrukom izvlakom podnice (*P*), koja nam također omogućuje udešavanje oštrih slika. Na takav aparat stavimo našu leću (B). Ovaj se aparat po upotrebi zaklopi (na slici u smjeru strelice S) tako, da je leća sa mijehom zaštićena.

Za izvor svjetlosti stavit ćemo amo jednu žarulju (Ž). Ona mora imati dva sjedišta (F i D). Jedno za osvjetljavanje fotografija, a drugo za osvjetljavanje diapozitiva. Da izbjegnemo upotrebu kondenzora, uzet ćemo mliječnu žarulju.



Sl. 2.

Da spriječimo prejako zagrijavanje aparata, potrebno je načiniti malu ventilaciju. To ćemo izvesti tako, da ispod i iznad lampe stavimo male limene rešetke V_1 *i* V_2), kroz koje će strujati zrak. Usto sa svake strane žarulje stavimo bakrenu pločicu *(Cu)*, kako se ne bi prejako grijale bočne strane.

Za reprodukciju slika, bilo iz knjiga ili s razglednica, moramo imati jednu ploču *(N)*, koja će predmete za reprodukciju prislanjati na stakleno oko *(O)*. Ploča mora biti, preko jednog koljena *(L)*, pričvršćena na dvokraku polugu *(E)* u smjeru 2:1 (na slici $(a+b):c$) radi lakšeg rukovanja.

Kod prikazivanja diapozitiva, pojedinačnih ili u trakama, poslužit ćemo se okvirom za diapozitive. Njega također možemo lako izraditi. Važno je to, da se on mora provlačiti zajedno sa filmom kroz aparat. Zato na diaskopu moramo načiniti mali prolaz (*H*) kroz koji će okvir kliziti lijevo i desno.

Osim toga na aparatu moramo ostaviti jedan otvor, kroz koji možemo doći do žarulje kod mijenjanja njena položaja u pojedinim funkcijama. Otvor se mora zatvoriti poklopcem *(R)*, da svijetlo ne prodire izvan aparata.

Moram spomenuti još i ogledalo (Z), koje mora prema staklenom oknu (*O*) i objektivu (*A*) biti pod kutom od 45 stupnjeva.

Takav će nam aparat davati povoljna i dobra povećanja Na pr. episkop sa žaruljom od 200 W na udaljenosti 3—4 m od zastora bacat će sliku u veličini oko 1,80×2,40 m. Istu veličinu slike daje i diaskop sa projiciranjem diapozitiva, ali na udaljenosti od 6—7 m. Želimo li postići mnogo veća povećanja, moramo upotrebiti jaču žarulju, jer će tada daljina aparata od projekcionog zastora biti veća.

Ovakav epidiaskop, u omjerima kakvi su na slici i sa svim dijelovima i mogućnostima, koje su spomenute u tekstu, načinjen je i praktički provjeren (Sl. 2.).

GORUPEC LJUBOMIR,
VIII. b. IX. gimn. (mješovite) Zagreb

NOVE KNJIGE

Blanuša D., *Teorija relativnosti.* Izd. Školska knjiga (Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju, knj. 7.), Zagreb 1955.

Na pristupačan način pisac ove knjige uvodi čitaoca preko općih fizikalnih pojmova, potrebnih za razumijevanje osnova teorije relativnosti, u sam predmet, u Einsteinovu kinematiku i dinamiku. Jednostavnim, gotovo isključivo elementarnim matematičkim sredstvima, autor objašnjava osnovne pojmove iz teorije relativnosti, posvećujući mnogo pažnje najosjetljivijim pojmovima, koje izlaže vrlo često na originalan način, što knjizi daje posebnu draž. Autor se svuda u toku izlaganja oslanja na eksperimentalne potvrde teorije, naročito na novije rezultate: mnogi će čitalac biti iznenađen da je, na primjer, dilatacija vremena pojava, koju danas potvrđuju činjenice (lijep eksperiment Ivesa i Stillwella, pa mjerenje razlike u vremenu raspadanja brzih i vrlo usporenih mezona). Na kraju svog izlaganja o specijalnoj teoriji relativnosti, autor je dodao jedno poglavlje o energiji i impulsu fotona, čime na zgodan način ukazuje na duboku vezu između dvaju najvećih dostignuća moderne fizike: teorije relativnosti i kvantne fizike.

U drugom dijelu knjige autor je na lak način dao fizikalnu jezgru i astronomske pojave u potvrdu opće teorije relativnosti. Poglavljima o značenju opće teorije relativnosti za problem svemira i o daljem razvoju opće teorije i njenom odnosu prema kvantnoj fizici, autor završava svoja izvanredno zanimljiva izlaganja o teoriji relativnosti.

Svakom učeniku najviših razreda srednjih škola, koji ima smisla za moderne probleme fizike, pružat će odlična knjižica prof. Blanuše izuzetnu lektiru ne samo za proširivanje i produbljivanje njegovog znanja iz moderne fizike i fizike uopće, nego će mu studij te knjižice pomoći, da sagleda najnovije putove naše fizikalne spoznaje koja se temelji upravo na teoriji relativnosti i kvantnoj fizici. *A. K.*

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Presudni dani u životu Michaela Faradayja

Slavni pronalazač elektromagnetske indukcije i osnovnih zakona elektrokemije Michael Faraday (Majkl Feredi) bio je kao dječak i mladić siromašan knjigoveški šegrt u Londonu. Pri svom poslu nailazio je na različite knjige, koje je rado čitao. Naročito su ga oduševljavala djela iz kemije i elektriciteta. U slobodno vrijeme posjećivao je predavanja iz kemije Humphryja Davyja (Hamfri Devi), jednog od najpoznatijih tadašnjih učenjaka. Savjesno je pravio bilješke o tim predavanjima. Žudio je za tim, da se posveti nauci, i to kemiji i elektricitetu. Zbog toga je nastojao, da se domogne bilo kakvog mjesta u jednom naučnom laboratoriju. No to nije bilo lako postići. Obratio se pismom samom predsjedniku londonskog »Kraljevskog društva«, ali mu ovaj po vrataru poruči, da uopće ne će odgovoriti na Michaelovo pismo. U to vrijeme 21-godišnji Michael promijenio je i poslodavca. Novi gazda bio je surov i grub. Sav potišten Michael susretne svog uglednog znanca Davisa (Devisa), koji je Michaela zavolio poradi njegova velikog interesa za nauku. Michael mu se izjada, a Davis mu savjetova, da se obrati samom Davyju:

»Napišite Davyju pismo. On je i sam upoznao bijedu i probio se s pomoću dobrih ljudi; on će vas razumjeti.«

Čitav tjedan pripremao je Faraday pismo Davyju. Sâmo pismo bilo je vrlo kratko, ali je Michael pismu dodao vrijedan prilog: prepisao je pomno u poseban svezak sve svoje bilješke s Davyjevih predavanja, koja je posjećivao, unio u njih i crteže Davyjevih eksperimenata, i svezak je najljepše uvezao. Pismo sa sveskom odnio je Michael 12. decembra 1812. u »Kraljevski institut«, da se preda Davyju. U pismu je označio svoju adresu.

»Vjerojatno opet ne će biti odgovora, razmišljao je, ali ne ću ići u »Kraljevski institut« da se raspitam. Ne ću da se ponovo sretnem s podsmijehom livriranih slugu.«

Nekoliko dana kasnije Michael, zbog božićnih praznika, nije otišao na posao. Sjedio je kod kuće i čitao. Najednom njegova desetgodišnja sestrica, gledajući kroz prozor, uzvikne: »Evo poštara! Ku-

da će? Čini se k nama. — Michaele, eto ti pisma; sigurno od tvog prijatelja.«

Michael uze pismo i — srce mu zalupa. Na velikom omotu pisma stajalo je ime odašiljača: *Kraljevski institut Velike Britanije*. Kada je Michael sav uzbuđen otvorio pismo ugleda potpis: »Vaš odani H. Davy.« Pismo je glasilo: »Gospodine, ugodno mi je povjerenje, koje ste mi iskazali. Razgledavajući vaše bilješke, vidio sam, da one pokazuju veliku marljivost, pažnju i sposobnost pamćenja. Sada odlazim iz Londona i vratit ću se tek krajem januara. Tada bih se rado vidio s vama. Svratite do mene, kada vam bude zgodno. Radovat ću se, ako vam budem mogao pomoći.«

Michael, drhćući, nekoliko puta pročita pismo. Sve oko njega učini mu se odjednom divno: i svijetli studeni dan, i palačinke, koje je majka pekla, i neumorno brbljanje njegove sestrice...

Mjesec dana poslije toga slavni je Davy primio Faradayja. Ali, nakon kraćeg razgovora, Davy, na veliko razočaranje Michaelovo, preporuči Faradayju da ne ostavlja svoj zanat. Ipak mu na kraju obeća, da će se vremenom možda naći kakvo mjesto za njega u Institutu.

I doista, ubrzo nakon toga, 1. marta 1813., Michael se vratio kući kao i obično u osam sati uveče. Nakon večere dohvatio je knjigu, ali mu se nije čitalo. Uskoro je cijela porodica legla na počinak, pa je i Michael htio utrnuti svijeću, kadli se na ulici začuje buka kočije i odmah zatim lupanje na ulaznim vratima.

»Tko je?« — vikne Michael.

»Od sir Humphryja«, začu se odgovor. Bio je to Davyjev kočijaš.

Kada se Michael vrati u kuću s pismom u ruci, majka, koja je mislila, da se Davyju dogodila opet kakva nesretna eksplozija (kao pred nekoliko dana, kad je time povredio oči), pa da zbog toga Davy zove Michaela da mu čita, — upita:

»Što se dogodilo? Zar opet eksplozija?«

Michael, koji se zadubio u pismo, odgovori tek nakon nekoliko trenutaka:

»Ne majko, nije eksplozija. To je revolucija u mom životu.«

Davy je pisao Faradayju, da ako želi, može dobiti mjesto, koje se upraznilo u laboratoriju Kraljevskog instituta. Uvjeti: dvadeset pet šilinga na tjedan i stan od dvije sobe na gornjem katu Instituta. U slučaju da pristaje, poziva se, da dođe ujutro radi dogovora.

Faraday s oduševljenjem prihvati Davyjev poziv i postade najprije njegov laborant, zatim asistent i najzad — jedan od najslavnijih i najoriginalnijih učenjaka prošlog stoljeća.

Jedno poopćenje brojeva Egipatskog trokuta

Provjerite, ta to nije teško, da je $33^2 + 44^2 = 55^2$.

Ne će li Vam se činiti malo čudno, da je i

$333^2 + 444^2 = 555^2$. (Provjerite i to!)

A što biste onda rekli, da je općenito:

$$(333\ldots3)^2 + (444\ldots4)^2 = (555\ldots5)^2. \quad (1)$$

Kao što vidimo, ako uzmemo tri broja, s nekom određenom istom množinom jednakih znamenki, od kojih je prvi broj sastavljen od samih znamenki 3, drugi od znamenki 4, a treći od znamenki 5, tada treba pokazati, da je kvadrat prvog broja (sa znamenkama 3) više kvadrat drugog broja (sa znamenkama 4), jednak kvadratu trećeg broja (sa znamenkama 5). Jasno je, da bi se i to moglo provjeriti i direktno kvadriranjem u slučajevima, kad brojevi ne bi imali preveliki broj znamenki. Ali to sigurno ne bi bilo baš najzgodnije, ako bi se radilo o kvadratu brojeva, koji imaju i malo veći broj znamenki. Postavlja se sada pitanje, kako bismo mogli nekako pokazati, da zaista vrijedi jednakost (1).

Radit ćemo ovako:

Svaki broj s istim znamenkama možemo napisati u obliku produkta te znamenke i broja, koji se sastoji od samih znamenki 1, i to, da ih ima isto toliko, koliko i znamenki ima zadani broj.

Na pr.

$3333 = 3 \cdot 1111$

$4444 = 4 \cdot 1111$

$5555 = 5 \cdot 1111$

Sada je razumljivo, da je:

$3333^2 = (3 \cdot 1111)^2 = 3^2 \cdot 1111^2$

$4444^2 = (4 \cdot 1111)^2 = 4^2 \cdot 1111^2$

$5555^2 = (5 \cdot 1111)^2 = 5^2 \cdot 1111^2$.

Drugim riječima mjesto:

$3333^2 + 4444^2 = 5555^2$

možemo pisati

$3^2 \cdot 1111^2 + 4^2 \cdot 1111^2 = 5^2 \cdot 1111^2$

a odavde kad skratimo na lijevoj i desnoj strani zajedničkim faktorom 1111^2, dobijemo:

$3^2 + 4^2 = 5^2$, (2)

a to je, kao što znamo, ispravno, jer je to poznati triplet cijelih brojeva *(Egipatski trokut)*, koji zadovoljava Pitagorin poučak.

Prema tome, ako ovu posljednju jednakost (2) pomnožimo s kvadratom broja koji ima samo znamenke 1, dobit ćemo onda općenito da je:

$(333\ldots3)^2 + (444\ldots4)^2 = (555\ldots5)^2$.

Ako su sada ova tri broja neke druge, ali neke određene istovrsne strukture, moći ćete sada sigurno i sami pokazati, da je na pr.

$303^2 + 404^2 = 505^2$

$3003^2 + 4004^2 = 5005^2$ i t. d. ili

$30303^2 + 40404^2 = 50505^2$ i t. d.

Nadalje je na pr.

$63^2 + 84^2 = 105^2$

$633^2 + 844^2 = 1055^2$

$6333^2 + 8444^2 = 10555^2$ i t. d.

U strukturi ovih triju brojeva, koje kvadriramo, možemo ići i dalje. Ako znamo da je

$21^2 + 28^2 = 35^2$

što lako provjerimo, onda je

$2121^2 + 2828^2 = 3535^2$

$212121^2 + 282828^2 = 353535^2$ i t. d.

Možemo imati i ovu grupu:

$24^2 + 32^2 = 40^2$

$2424^2 + 3232^2 = 4040^2$

$242424^2 + 323232^2 = 404040^2$ i t. d.

Analogno je i s brojevima 27, 36, 45, naime:

$272727^2 + 363636^2 = 454545^2$ i t. d.

Milenko Sevdić, Zagreb

Ima li Zemlja i drugih satelita osim Mjeseca

Američki učenjak Clemence tvrdi, da je vrlo vjerojatno, da oko Zemlje kruže sitna nebeska tijela, koja bi se dala iskoristiti kao stanice pri međuplanetnom letu. Radi se o tijelima sličnim meteoritima, koji često padaju na Zemlju, premda mnogo rjeđe dostižu samu površinu Zemlje. Naime, uz povoljne uvjete, t. j. pri određenim smjerovima i veličinama brzina meteorita i Zemlje, te određenim udaljenostima između ta dva tijela, može Zemlja na taj način privući takav meteorit, da doduše ne padne na nju, ali se više ne može osloboditi Zemljine privlačnosti, nego poput našeg Mjeseca počinje trajno kružiti oko našeg planeta. Tu se sad nameće pitanje: zašto su takvi sateliti, ukoliko postoje, izmakli astronomskim motrenjima? Zbog svoje brzine kruženja oko Zemlje! Što je, naime, satelit bliže svom planetu, to brže on obilazi oko njega. Na primjer, satelit, koji bi se nalazio na udaljenosti 1600 *km* od površine Zemlje, a obilazi Zemlju po kružnoj stazi, trebao bi svega dva i po sata da obiđe Zemlju. Pri takvoj brzini prolaz kroz vidno polje teleskopa je prebrz, a da bi se mogao vidjeti i ustanoviti. Isto tako, mala je vjerojatnost, da bi on ostavio kakav trag na fotografskoj ploči (kao što to čine oni meteoriti, koji pri svom padu prema površini Zemlje uđu u njenu atmosferu i trenjem u zraku se užare), budući da se u noći takav meteorit-satelit nalazi u Zemljinoj sjeni, pa je taman, jer ga Sunce ne obasjava. Za dana, pak, reflektirana svjetlost s meteorita-satelita gubi se poradi rasvijetljene atmosfere kao i svjetlost, što dolazi sa zvijezda. Preostaje samo nekoliko pogodnih trenutaka u sumraku, koji bi bili pogodni za fotografiranje ovih sitnih i nezamjetljivih nebeskih tijela.

Američki pomorski opservatorij i Meteorološki institut sveučilišta u Novom

Meksiku izradili su čitav program za pronalaženje i istraživanje tih mogućih satelita. Računa se, da će biti potrebno dvije do tri godine rada u tim naučnim zavodima, da se potvrdi ili pobije Clemenceova hipoteza.

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

156. Rešiti jednačinu $\sin^2 5x - \sin^2 2x = 0$.

157. Rešiti sistem

$$tg\,x + tg\,y = a,$$
$$tg\,(x + y) = b.$$

158*. Iz ma koje tačke M stranice BC jednakostraničnog $\triangle ABC$ spustiti $MP \perp AB$ i $MQ \perp AC$.

1° Dokazati da je $MP + MQ$ konstanta.

2° Koju liniju opisuje centar O kružne linije određene tačkama A, P i Q kad M opisuje stranicu BC?

159. Odaberi k tako da jednadžbe

$$(k-1)x^2 - (2k+1)x + 2 = 0,$$
$$(k+1)x^2 - (4k-1)x - 2 = 0$$

imadu zajednički korijen i odredi taj korijen.

160*. Dokaži: *a*) da kvadrat svakog prostog broja većeg od 3 podijeljen s 24 daje ostatak 1; *b*) da je $n(n^2+5)$, gdje je n kakavgod pozitivan cio broj, uvijek djelivo sa 6.

161*. Odredi m u sistemu:

$$(7m+2)x - (7m+3)y = 12,$$
$$(3m+1)x - 3my = 84$$

tako da bude $x - y = 2$. Provjeri rezultat.

162**. Dokaži, da je zbroj kuba triju uzastopnih cijelih brojeva uvijek djeljiv s kvadratom srednjeg broja uvećana za 2.

163*. Može li se odrediti m tako da sistem

$$(m+3)x + (m-2)y = 2m + 1,$$
$$(m+8)x + (m-5)y = 2m + 3$$

bude neodređen? Kad je m tako određeno, kako treba odrediti x, da y bude > 0?

164. Neka se odredi geom. mjesto središta krugova, koji dodiruju oba kruga $x^2+y^2=25$, $(x-9)^2 + y^2 = 16$ izvana.

165. Dokaži, ako su a, b, c mjerni brojevi stranica trokuta, kvadratna funkcija

$$y = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

je pozitivna za svako x.

166. Oko polukruga polumjera r neka se opiše istokračni trapez opsega $2s$. Diskusija!

B) Zadaci iz fizike

90*. U posudi se nalazi voda, mase $m_v = 1{,}8\ kg$ i temperature $t_v = 10^0C$. U nju se ubaci leda, mase $m_l = 0{,}3\ kg$ i temperature $t_l = 0^0C$, i dovede količina vodenih para, mase $m_p = 0{,}15\ kg$ i temperature $t_p = 100^0C$. Ako ne uzmemo u obzir toplinski kapacitet posude i druge gubitke topline, pita se, koja će biti konačna temperatura u posudi, nakon što se uspostavi temperaturna ravnoteža. Tališna toplina leda uzeta je 80 *kcal/kg*, a toplina kondenzacije vodenih para 540 *kcal/kg*. (Zadatak ponovo donosimo, jer je u prošlom broju omaškom ispuštena temperatura vode. — *Ur.*)

95*. Tijelu, teškom 50 *kg**, koje klizi po horizontalnoj ravnini, dana je početna brzina $v = 25\ m/sek$. 1) Kako će se daleko tijelo gibati, ako koeficijent trenja između tijela i podloge iznosi $\mu = 0{,}2$. — 2) Kolika je njegova brzina v_1 nakon prevaljenog puta $s_1 = 100\ m$?

96*. 17 grama* bakrenog sulfata, uronjenog u petrolej (spec. težina petroleja $s_1 = 0{,}84\ g^*/cm^3$), izgubi na težini 6,32 grama*. Kolika je spec. težina s_2 bakrenog sulfata?

97. Tijelo, teško 3 *g**, titra harmonično. Kolika mu je kinetička energija u trenutku, kad prolazi svojim položajem ravnoteže (mirnim položajem), ako je vrijeme titraja $T = 0{,}2$ sekunde, a amplituda mu je 4 *cm*?

98. U zatvorenoj posudi od 30 cm^3 nalazi se vodik pod tlakom od 700 *mm Hg*. U drugoj zatvorenoj posudi od 20 cm^3 nalazi se kisik pod tlakom od 600 *mm Hg*. Oba plina stavimo sad u zatvorenu posudu od 55 cm^3. Pita se 1) koliki je tlak u toj posudi? 2) Ako električnom iskrom upalimo smjesu vodika i kisika (praskavca), kojeg će plina preostati i koliki bi volumen zauzeo pod tlakom od 760 *mm Hg*? (Volumen nastale vode zanemarujemo.)

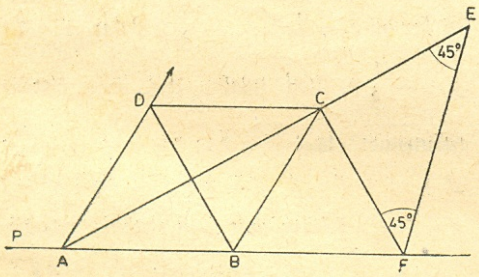
99. Platinena kocka teška je (u vakuumu) 580,5 *g**. Spec. težina platine neka je kod 0^0C jednaka 21,5 g^*/cm^3. Pita se 1) koliki je njen volumen kod $20^0\,C$,

ako je termički koeficijent rastezanja platine $\alpha = 0{,}0000088$; 2) istu kocku platine od 20°C objesimo na dinamometar i uronimo je u živu, težine 8127 g^*, a temperature 5°C; koliku težinu pokazuje dinamometar u prvom trenutku, dok je platina bila na 20°C a živa na 5°C, ako znamo, da je spec. težina žive pri 0°C jednaka 13,6 g^*/cm^3, a termički koeficijent rastezanja žive $\alpha_ž = 0{,}00018$; 3) nakon što se izjednače temperature platine i žive, kolika im je zajednička temperatura, uzevši da su spec. topline platine i žive približno jednake i to 0,03; 4) koliku težinu pokazuje dinamometar sada, nakon izjednačenja temperature žive i platine?

100*. Dva pola električnog izvora spoje se konstantanovom žicom, dugačkom *60 m*, a promjera 1,1 *mm;* žicom tad prolazi struja jakosti 0,9 ampera. Ako skratimo žicu na 15 *m*, jakost struje postaje jednaka 2,1 ampera. Koliki su unutrašnji otpor r_u i napetost E izvora struje, ako znamo, da je specifičan otpor konstantana 31 puta veći od bakra, a bakrena žica od 1 *mm* promjera i 100 *m* duljine ima otpor 2 oma?

C) Rješenja iz matematike

145. *Konstruisati romb, ako je dat zbir dijagonala i jedan ugao.*

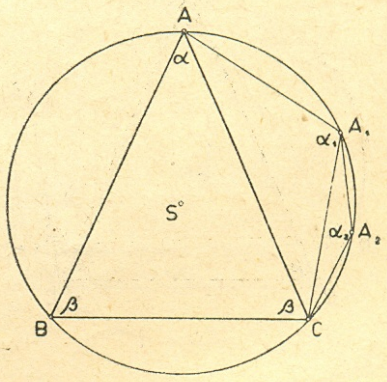


Pretpostavimo, da je $ABCD$ tražen romb. Tu nam je poznat zbir dijagonala $AC + BD = k$ i ugao ABC. Uglovi ABC i DAB su suplementni. Prema tome možemo konstruisati ugao PAD tj. ugao DAB i simetralu ugla DAB. Dijagonala je ujedno simetrala, jer znamo da kod romba dijagonala polovi ugao. Na ovu simetralu prenećemo zbir dijagonala $k = AE$. Da bi našli teme C treba da konstruišemo ravnokrako-pravougli trougao CEF sa pravim uglom C gde je $CE = CF = BD$, jer su dijagonale u rombu uzajamno normalne. Kako je $AC = AE - BD$ i $CE = BD = CF$, a $CF \perp AE$, to u točki E konstruišemo ugao od 45° i u preseku F od EF i prave na kojoj leži ugao PAD povući ćemo drugu polupravu takođe pod uglom od 45° prema EF. Ova poluprava preseći će duž AE u temenu C traženog romba $ABCD$. Iz tačke C povučemo paralele već postojećim kracima ugla PAD. Na preseku tih krakova i paralela nalaziće se druge dve tačke D i B, temena romba.

Baletić Božana
uč. 5 razr. 6 beogr. gimn.

146. *U datom krugu upisan je 1 oštrougli ravnokraki trougao. Nad jednim njegovim krakom, kao nad osnovicom, konstruisan je drugi ravnokraki trougao, čiji vrh se nalazi na kružnoj liniji. Nad krakom trougla konstruisan je na isti način treći ravnokraki trougao itd. Odrediti granicu kojoj teži ugao pri vrhu tih trouglova, vodeći računa da se nad krakom svakog upisanog trougla mogu konstruisati dva ravnokraka trougla sa vrhom na kružnoj liniji: oštrougli i tupougli.*

1° *Slučaj tupouglih trouglova.* — Pošto je četvorougao AA_1CB tetiban biće



$$\alpha_1 + \beta = \pi \quad \text{или}$$

$$\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \pi \quad \text{одакле је}$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

На потпуно исти начин из четвороугла AA_1A_2C следује

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\alpha}{2^2}$$

и даље

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{2^3} + \frac{\alpha}{2^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \cdots + \frac{\pi}{2^n} + \frac{\alpha}{2^n} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{\alpha}{2^n} \qquad (1)$$

Како је

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

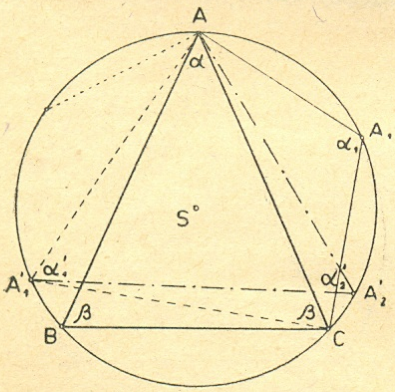
то ће једнакост (1) добити следећи вид:

$$\alpha_n = \pi\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\alpha}{2^n} = \pi - \frac{1}{2^n}(\pi - \alpha)$$

одакле следује непосредно

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \pi.$$

2° *Случај оштроуглих троуглова.* — Из тетивног четвороугла AA_1CA_1' следује



$$\alpha_1' + \alpha_1 = \pi \qquad (2)$$

но како је

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

из (2) ћемо имати:

$$\alpha_1' = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

На исти начин ћемо имати да је

$$\alpha_2' = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1'}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^2} + \frac{\alpha}{2^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n' = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right] +$$

$$+ (-1)^n \frac{\alpha}{2^n}$$

или

$$\alpha_n' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}} + (-1)^n \frac{\alpha}{2^n} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + (-1)^n \frac{\alpha}{2^n}$$

одакле имамо:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha'_n = \frac{\pi}{3}.$$

И. Б.

147. *Riješi sistem:* $x^2 + xy + y^2 = 7$ (1), $y^2 + yz + z^2 = 19$ (2), $z^2 + zx + x^2 = 13$ (3).

Ako (1) pomnožimo s -1, saberemo sa (2) i rastavimo na faktore dobivamo $(z - x)(z + y + x) = 12$ (4). Na isti način iz (3) i (2) dobivamo $(y - x)(z + y + x) = 6$. Deljenjem (4) sa (5) dobiva se $\frac{z - x}{y - x} = 2$, odakle $z = 2y - x$. Iz (1) i (2) zamenjujući u (2) z sa $2y - x$ imamo sistem $x^2 + xy + y^2 = 7$, $7y^2 - 5xy + x^2 = 19$. (6) Množenjem (1) sa -19, (6) sa 7 i sabiranjem dobivamo homogenu jednačinu $5y^2 - 9xy - 2x^2 = 0$. Ako stavimo $y = tx$, izlazi $5t^2 - 9t - 2 = 0$, čiji su koreni $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{5}$, dakle $y = 2x$, $y = -\frac{1}{5}x$. Sad imamo dva nova sistema (uzimajući (1) i $y = 2x$; (1) i $y = -\frac{x}{5}$), $x^2 + xy + y^2 = 7$, $y = 2x$; $x^2 + xy + y^2 = 7$, $y = -\frac{x}{5}$. Rešavanjem ovih sistema nalazimo

$x_{1,3} = \pm 1$, $y_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $y_{3,4} = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}$; z izlazi iz $z = 2y - x$, dakle $z_{1,2} = \pm 3$, $z_{3,4} = \mp \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Mes'ut Baki,
uč. 7d r. g. Skopje

Spasojević Dušan, uč. 8. r. g. Trstenik i Plander Zdravko, uč. 8. r. g. Vukovar dolaze također do relacije $y = \frac{x+z}{2}$, te su se onda zgodno sjetili, da rješenja zadanog sistema čine aritmet. niz, gdje je y srednji član. Zato je $x = y - d$, $z = x + d$, pa tako dobivaju sistem $3y^2 - 3dy + d^2 = 7$, $3y^2 + d^2 = 13$, odakle izlazi $y_{1,2} = \pm 2$. $y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, $d_{1,2} = \pm 1$, $d_{3,4} = \pm 2\sqrt{3}$ i dalje izlaze gornje vrijednost za x i z.

148. *Реши једначину*

$$(2x + m + n)[(x + m)^3 - (x + n)^3] = 3(m - n)[(x + m)^3 + (x + n)^3].$$

Да бисмо решили ову једначину изразе $(x + m)^3 - (x + n)^3$ и $(x + m)^3 + (x + n)^3$ раставићемо на просте чиниоце. На тај начин добијамо

$$(2x+m+n)[(x+m)-(x+n)][(x+m)^2 - (x+m)(x+n) + (x+n)^2] - 3(m-n)[(x+m)+(x+n)][(x+m)^2 - (x+m)(x+n) + (x+n)^2] = 0$$

или

$$(2x + m + n)(m - n)(3x^2 + 3mx + 3nx + m^2 + mn + n^2) - 3(m-n)(2x+m+n)(x^2 + mx + nx + m^2 - mn + n^2) = 0.$$

Извлачењем зај. чиниоца испред заграде имамо:

$$(2x + m + n)(m - n)(4mn - 2m^2 - 2n^2) = 0$$

или

$$-2(m^2 - 2mn + n^2)(m - n)(2x + mx + n) = 0$$

$$(m - n)^3(2x + m + n) = 0.$$

Нека је $m - n \gtrless 0$, излази $2x + m + n = 0$

$$x = -\frac{m+n}{2}.$$

Кокановић М. Драган
уч. 5б р. г. Прокупље

149. *Za koje vrijednosti od m ima rješenja jednadžba*

$$m \sin^2 x + 6 \sin x + m + 8 = 0?$$

Da ta jednadžba ima rješenja, moraju vrijednosti od $\sin x$, koje udovoljavaju toj jednadžbi biti: 1. realne i 2. sadržane između -1 i $+1$ uključujući i te vrijednosti.

Zadatak ima samo 1 rješenje, ako je ispunjen uvjet $f(-1) f(1) < 0$, $f(-1) = 2m + 2$, $f(1) = 2m + 14$, dakle $(2m + 2)(2m + 14 < 0$ ili $-7 < m < -1$. Oba se korijena nalaze zmeđu -1 i $+1$, ako su ispunjeni ovi uvjeti: 1. $D \geqq 0$, 2. $af(-1) > 0$, 3. $af(1) > 0$, 4 i 5 $-1 < \frac{S}{2} < 1$. Iz prvog uvjeta izlazi $m^2 + 8m - 9 \leqq 0$, t. j. $-9 \leqq m \leqq 1$, iz 2) $mf(-1) > 0$ izlazi $m(2m + 2) > 0$ ili $-\infty < m < -1$, $0 < m < \infty$, iz 3) $mf(1) > 0$ izlazi $m(2m + 14) > 0$ ili $-\infty < m < -7$, $0 < m < \infty$; iz 4) i 5) izlazi $m(m + 3) > 0$, $m(m - 3) > 0$ ispunjeno za $-\infty < m < -3$, $3 < m < \infty$; svih je 5 uvjeta ispunjeno za $-9 \leqq m < -7$; za $m = -7$, $\sin x_1 = 1$, $\sin x_2 = -\frac{1}{7}$.

Dmitar Terzić
uč. 8. r. g. Doboj

150. *Zadana je velika os elipse 2a i linearni ekscentricitet e. Desnim fokusom F′ povučen je do točke M elipse radijvektor r, kut FF′M neka je φ.*

1) Izračunaj dužinu radijvektora r kao funkciju od a, e i φ; 2) Izračunaj dužinu r′ = FM′ radijvektora paralelnog s F′M povučenog fokusom F; 3) pokaži, da je $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ *nezavisno o φ i ispitaj, kako se mijenja* $z = \frac{1}{r + r'}$, *kad se φ mijenja od 0° do 180°.*

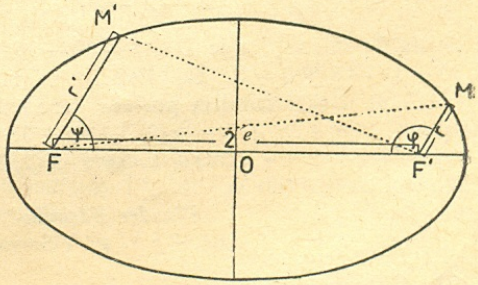
Neka je $\overline{FM} = r_1$, $\overline{F'M'} = r_2$ i $\sphericalangle M'FF' = \psi$.

1) Из троугла FMF', применом косинусне теореме добија се:

$$r_1^2 = 4e^2 + r^2 - 4er\cos\varphi, \quad \text{или}$$

$$(r_1 - r)(r_1 + r) = 4e(e - r\cos\varphi),$$

како је $r_1 + r = 2a$ то је



$$r_1 - r = \frac{2e(e - r\cos\varphi)}{a},$$

ово одузето од $r + r_1 = 2a$ даје $ar = a^2 - e^2 + er\cos\varphi$ одакле је

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi}.$$

2) Слично се налази $r' = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\psi}$ и

јер је $\psi = 180° - \varphi$, $r' = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}$.

3) $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{a - e\cos\varphi}{b^2} + \frac{a + e\cos\varphi}{b^2} = \frac{2a}{b^2}$,

што значи да $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ не зависи од φ;

$$r + r' = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi} + \frac{b^2}{a + e\cos\varphi} =$$

$$= \frac{2ab^2}{a^2 - e^2\cos^2\varphi}, \quad \frac{1}{r + r'} = \frac{a^2 - e^2\cos^2\varphi}{2ab^2}.$$

Ако φ расте од 0° до 90°, z расте од $\frac{1}{2a}$ до $\frac{a}{2b^2}$, ако φ и даље расте од 90° до 180° z пада од $\frac{a}{2b^2}$ до $\frac{1}{2a}$, $\frac{a}{2b^2}$ је масимална вредност од z.

Спасојевић Душан
уч. 8 р. г. Трстеник

151. *Neka se dokaže: svi pravci dani jednadžbom,* $x(m^2 + 3m + 5) - y(2m^2 + 4m + 3) + 4m^2 + 6m - 1 = 0$ *prolaze istom čvrstom bilo m koliko mu drago.*

Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $m^2(x - 2y + 4) + m(3x - 4y + 6) + 5x - 3y - 1 = 0$

Pravci će prolaziti istom čvrstom točkom $T(x_1, y_1)$ bez obzira na m, ako sistem $x - 2y + 4 = 0$, $3x - 4y + 6 = 0$, $5x - 3y - 1 = 0$ ima zajedničko rješenje.

Zato mora biti: $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, što je doista ispunjeno, jer je $D = 4 - 60 - 36 + 80 + 18 - 6 = 0 = 0$. Zaj. rješenje se nalazi $T(2, 3)$. Dakle familija pravaca dana jednadžbom $x(m^2 + 3m + 5) - y(2m^2 + 4m + 3) + 4m^2 + 6m - 1 = 0$ prolazi točkom $T(2, 3)$ koliko mu drago bilo m.

Plander Zdravko
uč. 8.a r. g. Vukovar

152. *Odrediti a i b tako da polinom* $ax^5 + bx^4 + 16$ *bude djeljiv s* $(x - 2)^2$.

Mora da je

$ax^5 + bx^4 + 16 \equiv (x^2 - 4x + 4)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \equiv a\alpha^5 + (\beta - 4\alpha)x^4 + (4\alpha - 4\beta + \gamma)x^3 + (4\beta - 4\gamma + \delta)x^2 + (4\gamma - 4\delta)x + 4\delta$ и одатле упоређивањем коефицијената једнако високих потенција од x излази $\alpha = a$, $\beta - 4\alpha = b$, $4\alpha - 4\beta + \gamma = 0$, $4\beta - 4\gamma + \delta = 0$, $4\gamma - 4\delta = 0$, $4\delta = 16$. Одавде добијамо да је $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = 4$ и најзад да је $a = 2$ а $b = -5$ па је

$$(2x^5 - 5x^4 + 16) : (x^2 - 4x + 4) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4.$$

Митровић Жарко
6 р. г. Врање

153. *Koji uvjet mora biti ispunjen da sistem* $x + ay + a^3 = 0$, $x + by + b^3 = 0$, $x + cy + c^3 = 0$ *ima zajedničko rješenje?*

Систем не мора да има заједничко решење, јер ако решимо последње једначине да би била задовољена прва једначина мора да постоји одређен услов.

Решимо ли последње две једначине

$$x = \frac{b^3c - bc^3}{b - c} = bc(b + c),$$

$$y = \frac{b^3 - c^3}{c - b} = -b^2 - bc - c^2.$$

Мора бити

$$bc(b + c) - ab^2 - abc - ac^2 + a^3 = 0$$

или $a(a^2 - b^2) + c^2(b - a) + bc(b - a) = 0$,

$$a(a + b) - c^2 - bc = 0,$$

$$a^2 + ab - c^2 - bc = 0,$$

$$a^2 - c^2 + b(a - c) = 0,$$

$$(a - c)(a + b + c) = 0$$

или $a + b + c = 0$.

Ђенадић Драгољуб
уч. 5_5 р. г. Прокупље

154. *Neka se odrede točke na objema granama hiperbole* $16x^2 - 9y^2 = 144$, *koje su najbliže točki* $T\left(0, \frac{75}{16}\right)$.

Тражене точке bit će на onim normalama hiperbole, koje prolaze točkom T. Jednadžba normale glasi

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1) \text{ t. j.}$$

$y - y_1 = -\frac{9y_1}{16x_1}(x - x_1)$, gdje su x_1 i y_1 još vezani relacijom $16x_1^2 + 9y_1^2 = 144$ (1). Jer T leži na normali, bit će

$\frac{75}{16} - y_1 = \frac{9y_1}{16}$, a odavle $y_1 = 3$, što uvršteno u (1) daje $x_{1,2} = \pm\frac{15}{4}$. Tražena točka imade dakle ove koordinate

$$T_1\left(\frac{15}{4}, 3\right), \quad T_2\left(-\frac{15}{4}, 3\right).$$

Sandalj Mladen
uč. 8. r. g. „B. Ogrizovića“ Zagreb

155. *Odredimo pomoću determinanta jednačinu kruga koji prolazi kroz tačke*

$$A\,(4,0),\ B\,(0,6),\ C\,(-1,\ -1).$$

Ako su sve tri date tačke na jednom kругu moraju zadovoljavati uslov:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0,\\ x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c &= 0,\\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c &= 0,\\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sistem od 4 jednačine sa tri nepoznate može postojati samo ako je

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ili } \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ 16 & 4 & 0 & 1\\ 36 & 0 & 6 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ako četvrtu vrstu oduzmemo od svake dobićemo

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-2 & x+1 & y+1 & 0\\ 14 & 5 & 1 & 0\\ 34 & 1 & 7 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^2+y^2-2 & x+1 & y+1\\ 14 & 5 & 1\\ 34 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Ili

$$34\,(x^2+y^2-2) - 64\,(x+1) - 156\,(y+1) = 0$$

tj. $17x^2 + 17y^2 - 32x - 78y - 144 = 0.$

Pera Tošić — Ruđanac
Beograd

Riješili zadatke iz 3. broja

Baletić Božana, uč. 5. r. 6 beogr. gim. 145; *Bogdanović Milan*, uč. 8_2 r. g. Valjevo, 154; *Čanji Ema*, uč. 5a r. mađ. g. Sombor, 145, 148; *Đubo Enver*, uč. 6.b r. 1. g. Banja Luka, 147; *Fišer Darko*, uč. 7.b r. g. Osijek, 147; *Iliškovič Aleksandar*, uč. 7.b r. g. Doboj, 145, 146, 147; *Juhas Tibor*, uč. 5.a r. mađ. gimn. Sombor, 145; *Kosanović Vlado*, uč. 8.b r. g. Ogulin, 154; *Kovačić Ivan*, uč. 8.b r. g. Sl. Požega, 150, 151, 154, 155; *Kuprešanin Marko*, uč. 8.a r. 1. m. gimn. Banja Luka, 146, 147, 149, 150, 151, 154, 155; *Manojlović Vladan*, uč. 7_4 r. g. Prokuplje, 148; *Me'sut Baki*, uč. 7.d r. g. Skopje, 147; *Pitinac Katica*, uč. 5. r. g. Đakovo, 145, 148, 152, 153; *Plander Zdravko*, uč. 8 r. g. Vukovar 146, 147, 149, 150, 151, 154, 155; *Sandalj Mladen*, uč. 8.c r. g. Zagreb, „B. Ogrizovića" 147, 148, 150, 151, 153, 154; *Šimunić Bruno*, uč. 6.d r. 4. gimn. Zagreb, 148; *Šmigoc Karel*, uč. 6.c r. 2. g. Celje, 145; *Terzić Dmitar*, uč. 8. r. g. Bos. Novi, 145, 146, 147, 148, 149, 152, 153, 154; *Varga Atila*, uč. 7. r. mađ. g. Sombor, 149; *Veksli Zorica*, uč. ž. gimn. Varaždin, 155; *Botevski Tome*, uč. 7 kl. r. „J. B. Tito", Bitola, 145, 146; *Veselinović M. Milan*, uč. 5_6 r. g. Prokuplje, 148, 152; *Viđentić Živorad*, uč. M_{31} sr. tex. šk. Valjevo, 147; *Vujanović Miliivoje*, uč. 8 razreda gimn. Cetinje, 149 (del.). *Ženadić Dragoljub*, uč. 5_5 r. g. Prokuplje, 148, 152, 153, 155 (del.); *Đoković Boško*, uč. 8_3 r. g. Prokuplje, 155; *Đurđević Petar*, uč. 8r. Sm. Palanka, 146; *Ivošević Branislav*, uč. 5_5 r. g. Prokuplje; 145, 148; *Kamanin Radivoje*, uč. 7 r. 2 g. Kraljevo, 146, 149; *Kovijanić Predrag*, uč. 6_3 r. g. Aranđelovac, 145, 153 (del.); *Kokanović M. Dragan*, uč. 5_6 1. g. Prokuplje, 145, 148; *Kopitović Špiro*, uč. 8 r. g. Cetinje, 149 (del.); *Kulagić Tada*, uč. 3 r. uč. šk. Novi Pazar, 145, 147, 148, 152, 153, 155; *Marković Đ. Sava*, uč. 7_3 r. g. Aranđelovac, 147, 149 (del.); *Mitrović Žarko*, uč. 6 r. g. Vranje, 145, 152; *Potić Svetozar*, uč. 5_5 r. g. Beograd, 145; *Radović Miodrag*, uč. 8_1 r. 1 g. Pirot, 147, 149, 150, 151 154; *Redi O. Ivan*, uč. 6_2 r. osm. šk. Vranje, 145; *Simić Radomir*, 5b r. g. Prokuplje, 148, 152; *Spasojević Dušan*, uč. 8 r. g. Trstenik, 147, 149, 150, 151, 154, 155; *Stanković B. Miroslav*, uč. 5_5 r. g. Prokuplje, 145, 148, 152 (del.); *Ćepulić Vladimir*, 5. c kl. g. Zagreb, 152; *Marinković Bogoljub*, uč. 8_2 r. 1 g. Kraljevo, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 154, 155; *Štšepanović Borko*, uč. 7 r. gimn. Svilajnac, 147, 149.

D) Rješenja zadataka iz fizike

91. *Polumjer planeta Jupitera je $R = 71000$ km. Jedan njegov mjesec udaljen je od središta Jupitera 27 R i obiđe svoj planet za 16,69 dana(1 dan = 86 400 sekundi). Kolika je akceleracija padanja g_1, izražena u m/sek², na površini Jupitera?*

Rješenje: Centripetalna akceleracija a_1 spomenutog Jupiterovog mjeseca pri njegovom (kružnom) gibanju oko Jupitera, na udaljenosti $r = 27\,R$ od središta planeta, bit će:

$$a_1 = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 27\,R}{T^2},$$

gdje je $R = 71\,000$ km $= 71 \cdot 10^6\,m$ polumjer Jupitera, a $T = 16{,}69$ dana $= 16{,}69 \cdot 86\,400\,sek$ ophodno vrijeme mjeseca.

Na površini Jupitera, koja je njegovom središtu 27 puta bliža od mjeseca, bit će akceleracija g_1 27^2 puta veća, jer je po Newtonovom općem zakonu gravitacije privlačna sila

između dva tijela obrnuto proporcionalna udaljenosti dvaju tijela, a po temeljnom zakonu gibanja (II. Newtonov aksiom), vrijedit će isto za akceleraciju padanja, budući da je akceleracija proporcionalna sili. Prema tome imamo:

$$g_1 = 27^2 a_1 = \frac{4\pi^2 \cdot 27^3 R}{T^2} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 27^3 \cdot 71 \cdot 10^6}{(16{,}69 \cdot 86\,400)^2}$$

$$\underline{g_1 = 26{,}52\ m/sek^2.}$$

Riješili:

Бошевски Томе, 7 кл. В. г. Битола; *Ђурђевић Петар*, 8 раз. гимн. Смед. Паланка; *Magjer Tomislav*. 4. a K. O. teh. šk. Zagreb; *Mešut Baki*, 7 d raz. gimn. Skopje; *Plander Zdravko*, 8. a r. g. Vukovar; *Спасојевић Душан*, 8 p. r. Трстеник; *Šmigoc Karel*, 6. c II. gimn. Celje.; *Ćepulić Vladimir*, 5.c r. kl. g. Zagreb.

92, *Željezni kotač, polumjera 3 m a težine 300 kg*, vrti se oko horizontalne osi (trenje zanemarujemo). Čitava masa kotača raspodijeljena je jednoliko po njegovoj periferiji. Pita se 1) kolika mu je kinetička energija (u kg*m) pri jednolikom obrtanju sa 150 okretaja/min; 2) na rubu kotača učvršćena je mala kugla; kakvo će gibanje izvršiti ta kuglica i u kojoj udaljenosti* $\overline{AO}$ *(odnosno* $\overline{AO'}$*) od osi kotača zgađa tlo, ako a) napušta kotač u najvišoj točki B, b) u najnižoj točki B' svoje vrtnje (os kotača nalazi se* $OC = 4\ m$ *iznad tla)?*

Rješenje: 1) Linearna brzina v (u sekundi) jedne točke na periferiji kotača bit će:

$$v = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \frac{150}{60} = 15\pi\ m/sek.$$

Kinetička energija kotača, budući da je njegova cijela masa raspoređena jednoliko po njegovoj periferiji, bit će:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (3 \cdot 10^5) \cdot (15\pi \cdot 100)^2\ erga.$$

Kako 1 kg^*m ima $9{,}81 \cdot 10^7$ *erga*, imamo:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3 \cdot 10^5) \cdot (15\pi \cdot 100)^2}{9{,}81 \cdot 10^7}\ kg^*m,$$

$$\underline{E_k = 33\,955\ kg^*m.}$$

2) Gibanje male kugle, nakon što je napustila kotač u točki B (ili B') vrši se po paraboli. Ono je sastavljeno iz horizontalnog gibanja brzinom v i vertikalnog jednoliko-ubrzanog padanja akceleracijom g (početna brzina padanja je, dakako, $= 0$).

a) Napušta li kuglica kotač u najvišoj njegovoj točki B, padat će 7 metara; zato će biti:

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

$$7 = \frac{9{,}8}{2} \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{9{,}8}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 70}{49 \cdot 2}}$$

$$t = \frac{1}{7}\sqrt{70}\ sek.$$

Horizontalni put, što ga za to vrijeme padanja prijeđe kuglica, jest:

$$CA = v \cdot t = 15\pi \cdot \frac{1}{7}\sqrt{70}\ m,$$

a udaljenost OA bit će:

$$OA = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{v^2 t^2 + 4^2}$$

$$\underline{OA = 56{,}45\ m.}$$

b) Napušta li kuglica kotač u najnižoj točki, propadat će sada do tla samo 1 m, pa imamo:

$$1 = \frac{g}{2} t'^2$$

$$t' = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9{,}8}} = \frac{1}{7}\sqrt{10}\ sek$$

a udaljenost OA' bit će:

$$OA' = \sqrt{v^2 t'^2 + 4^2}$$

$$\underline{OA' = 21{,}66\ m.}$$

Riješili:

Plander Zdravko, 8.a r. g. Vukovar; *Бошевски Томе* 7 p. B. r. Битола.

Djelomično riješili: *Ђурђевић Петар*, 8 p. r. Смед. Паланка; *Fišer Darko*, 7. b r. g. Osijek; *Кашанин Радивоје*, 7 p. II. м. r. Краљево; *Mešut Baki*, 7 d r. g. Skopje; *Спасојевић Душан*, 8 p. r. Трстеник.

93. Tramvaj, težak 10 tona, uspinje se brzinom od 15 km/sat po pruzi, koja je priklonjena 6 % prema horizontali, t. j. sinus priklonog kuta je 0,06. Pita se 1) kolikom snagom (u kilovatima) djeluje motor (trenje i otpor zraka su zanemareni); 2) motor tjera struja, napetosti 500 volta, s korisnim efektom od 80 %; kolika je jakost struje?*

Rješenje: 1) Ako tramvaj prevaljuje 15 *km/sat* znači, da se giba brzinom $\frac{15\,000}{3600}$ *m/sek*, pa se za vrijeme jedne sekunde popne za visinu h.

$$h = \frac{15\,000}{3\,600} \cdot 0{,}06 = 0{,}25\ m$$

Prema tome je snaga tramvaja

$$S = 10\,000 \cdot 0{,}25 = 2\,500\ kg*m/sek =$$
$$= 2\,500 \cdot 9{,}81\ vata = 2{,}5 \cdot 9{,}81\ kilovata$$
$$S = 24{,}525\ kW.$$

2) Jakost struje i, napetosti 500 volta, ako je korisni efekt 80 % (0,8), dobivamo iz izraza:

$$S = (500 \cdot i) \cdot 0{,}8.$$

Snagu moramo izraziti u vatima, dakle $S = 24\,525$ *vata*, pa imamo

$$i = \frac{S}{500 \cdot 0{,}8} = \frac{24\,525}{500 \cdot 0{,}8}$$

$$i = 61{,}31\ ampera.$$

Riješili:

Кашанин Радивоје, 7 p. II. м. г. Краљево; *Lučić Krsto*, 4. r. Sr. pom. šk. Kotor; *Plander Zdravko*, 8. a r. g. Vukovar; *Спасојевић Душан*, 8. p. r. Трстеник.

94. *Ampermetar, koji pokazuje miliampere, ima skalu od 0 do 100 miliampera. Njegov otpor je 1 om. Pita se 1) koliki otpor (shunt) treba staviti između njegovih polova da bi ampermetar sad pokazivao struju od 1 ampera, kad kazaljka pokazuje na skali „100“; kolika je jakost struje i_1, koja prolazi ampermetrom, a kolika je jakost struje i_2, koja prolazi shuntom; koliki je sad otpor cjelokupnog aparata (ampermetar + shunt), uklopljenog u krug struje? 2) Shuntirani ampermetar uklopimo u krug struje u seriju s uzvojnicom B, koja ima otpor 5 oma, i sa izvorom struje, napetosti E i nutarnjeg otpora r; kazaljka na ampermetru pokazuje sad „50“. Ako sad uzvojnicu B zamijenimo drugom B′, koja ima otpor 10 oma, kazaljka ampermetra pokazuje sad na skali „40“; koliki su E i r?*

Rješenje: 1) Kada kazaljka pokazuje znak „100“ na skali ampermetra, kojem otpor $r_a = 1$ *om*, znači to, da ampermetrom prolazi struja od 100 *miliampera* = 0,1*ampera*. Ako želimo da kazaljka ampermetra pokazuje na „100“, kad krugom struje teče struja jaka 1 *amper*, trebat će upotrebiti otpornik (shunt) između polova ampermetra, tako, da je otpor r_s shunta jednak $\frac{1}{9}$ otpora ampermetra:

$$r_s = \frac{1}{9} r_a = \frac{1}{9}\ oma = 0{,}11\ oma.$$

Ampermetrom će prolaziti $\frac{1}{10}$ cjelokupne jakosti sruje, a shuntom $\frac{9}{10}$ (Kirchhoffov zakon!), pa će biti

$$i_1 = 0{,}1\ ampera, \qquad i_2 = 0{,}9\ ampera.$$

Cjelokupan otpor R aparata (ampermetar + shunt) bit će:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_s} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = 10.$$

$$R = 0{,}1\ om.$$

2) Iz formule

$$E = i \cdot r_c, \qquad (1)$$

gdje je r_c cjelokupan otpor u krugu struje, i je jakost struje, E je napetost izvora struje, — izlazi, budući da je jakost struje u krugu, kad shuntirani ampermetar pokazuje na skali „50“, jednaka 0,5 *ampera*, a ukupni otpor r

$$r_c = R + r_u + r$$

(r_u je otpor uzvojnice, r je unutrašnji otpor izvora struje):

$$E = 0{,}5\,(0{,}1 + 5 + r) = 0{,}5\,(r + 5{,}1).$$

To je prva jednadžba za izračunavanje E i r; drugu dobivamo iz relacije (1), kad u krug struje mjesto uzvojnice B uklopimo uzvojnicu B' (s otporom 10 *oma*); tad će biti:

$$E = 0{,}4\,(0{,}1 + 10 + r) = 0{,}4\,(r + 10{,}1).$$

Izjednačimo desne stranice posljednjih dviju jednadžba:

$$0{,}5\,(r + 5{,}1) = 0{,}4\,(r + 0{,}1),$$

pa odatle izlazi

$$r = 14{,}9\ oma.$$

Uvrstimo li tu jednadžbu u jednu od dviju jednadžbi za E, dobivamo

$$E = 10\ volta.$$

Riješili:

Plander Zdravko, 8. a r. g. Vukovar; *Кашанин Радивоје*, 7 p. II. м. г. Краљево.

Djelomično riješili: *Ђурђевић Петар*, 8 p. r. Смед. Паланка; *Lučić Krsto*, 4. r. g. Sr. pom. šk. Kotor.

Naknadno, na vrijeme stigla rješenja iz fizike

Jovančević Dobrosav, 7 r. g. Trstenik (zad. 88.)

Zadaci na ispitu zrelosti u zagrebačkim gimnazijama

na kraju šk. god. 1953./54.

1. Imamo četiri broja. Ako se odbije prvi, ostane geometrijski niz. Ako se odbije posljednji, ostane aritmetički niz. Odredite te brojeve kad zbroj prvoga niza iznosi 19, a drugoga 12.

2. Kod kosoga stošca prikloni kut najveće stranice $S = 15$ prema bazi dva puta je manji od priklonog kuta najmanje stranice $s = 19$ Koliki je volumen ovoga stošca? Neka se nađe odnos njegova volumena prema volumenu opisane kugle!

3. Iz ishodišta su povučene obje tangente na kružnicu: $K = x^2+y^2-6x-2y+8=0$. Druga kružnica konstruirana je tako, da prolazi dirališnim točkama tangenata i ishodištem. Neka se postavi jednadžba te kružnice i nađe kut, pod kojim se sijeku te dvije kružnice!

1. *gimn. Zagreb*

1. Stranice trokuta čine aritmetički niz čija je razlika 2, a jedan kut iznosi 120^0. Koliko iznosi razlika između polumjera opisane i upisane kružnice u tom trokutu, kao i kutovi tog trokuta?

2. Istokračan trokut, čiji je opseg $2s$, a krak je geometrijska sredina osnovice i visine, rotira oko pravca, koji prolazi kroz vrh na osnovici i stoji okomito na njoj. Izračunaj oplošje i volumen rotacionog tijela.

3. Odredi točke u kojima se sijeku parabola $y^2 = 32x$ i kružnica kojoj je polumjer $r = 26$, a opisana je oko žarišta parabole. Koje su jednadžbe tangenata u gornjem sjecištu i koji kut čine te tangente? Kolika je površina trokuta što ga čine tangente s osi x?

2. *gimn. Zagreb*

1. Riješi

$$\frac{1}{(x+2)(y-3)} = 3, \quad \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{16}{(y-3)^2} = 25$$

2. Iz drvenog trupca oblika uspravnog krnjeg stošca, čija je dužina 3,5 m, a opsezi baza $O_1 = 2{,}512$ m i $O_2 = 1{,}884$ m, radnik treba da isteše prizmatičan stup, koji ima za osnovu pravilan peterokut upisan u manjoj bazi stošca i da taj stup bojadiše. Visina stupa je jednaka dužini trupca. Kolika je težina otpadaka i koliko košta bojadisanje, ako je spec. tež. drveta $s = 0{,}74$, a bojadisanje se po m^2 plaća 120 *Din.*

3. Tangente parabole $y^2 = 4x$ povučene u njenim točkama A (1,2), B (1,-2), C (9,6) zatvaraju trokut Izračunaj opseg, površinu i kutove trokuta i odredi jednadžbu kružnice opisane oko trokuta!

3. *gimn. Zagreb*

1. Riješi ovu eksponencijalnu jednadžbu

$$3^{5x-6} \cdot 81^{2x+3} = 9^{4x+5} \cdot 3^{x-2}.$$

2. U kugli volumena 2713,5 cm^3 upisan je stožac. Koliki je volumen toga stošca, ako mu je kut na vrhu osnog presjeka $67^0\,14'\,25''$?

3. Kako glasi jednadžba parabole, čiji je vrh u središtu, a žarište u desnom žarištu elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$?

4. *gimn. Zagreb*

1. Aritm. i geom. niz podudaraju se u trećem članu, koji je 27. Produkt prvih članova je 612, a produkt drugih je 108. Kvocijent geom. niza i pripadna pozitivna diferencija aritm. niza su prva 2 člana novog geometrijskog niza. Koliko članova novog niza treba zbrojiti, da suma bude 2299,5. Koliki je zadnji zbrojeni član?

2. Četiri točke A, B, C, D uzete u pozitivnom smjeru, određuju na ravnom terenu četverokut. Produži li se strana AB preko B, $\overline{OC}$ preko C, dobije se točka S kao sjecište tih produženih dužina. Odredi dužinu CS, ako je zadano $\overline{AB} = a = 65\ m$, $\overline{BC} = b = 16\ m$, $AD = d = 49{,}962\ m$, $\sphericalangle DAB = \alpha = 67°52'30''$, $\sphericalangle ABC = \beta = 120°$.

3. Na krivulje

$$y^2 = 4x \text{ i } 9x^2 + 9y^2 + 282x + 2169 = 0$$

povuku se 2 zajedničke tangente tako, da je sjecište tangenata između krivulja. Spoje li se dirališta s pripadnim fokusom ili centrom krivulje, dobiju se slike, kojima stranice leže na tim spojnicama i tangentama. Odredite površinu svakog lika i kut pod kojim se vidi svaka krivulja iz zajedničkog vrha oba lika.

5. g. *„B. Ogrizović"*

1. Da li točka M (1,3) leži na krivulji $y = 3\sin(3x + \pi)$? Riješi to grafički i računom. Ako leži, da li je ispod ili iznad

krivulje? Kolika bi morala biti amplituda a funkcije $y = a \sin(3x + \pi)$, da bi zadana točka bila na krivulji?

17. 2. Brod plovi u magli. Na radarskoj slici mjerila 1 : 5000 vide se dvije zapreke A i B između kojih brod mora da prođe. Na slici je prva zapreka udaljena od broda 6 *cm*, druga 8 *cm*. Dužina AB vidi se pod kutom od 30°. Koji kurs mora uzeti brod, da u jednakim udaljenostima prođe mimo obih zapreka? Kolika će biti najmanja udaljenost broda od pojedine zapreke, a kolika, kad on bude jednako udaljen od njih? Zadatak riješi najprije konstrukcijom, a onda računom!

18. 3. Pravac $2x - y\sqrt{2} = 4$ dira hiperbolu u točki M $(4, 2\sqrt{2})$. Oko središta hiperbole opisana je kružnica, koja prolazi žarištima hiperbole. Odrediti: 1. površinu kružnog isječka između pozitivnih smjerova asimptota, 2. površinu kuglinog pojasa što ga opiše luk tog isječka rotacijom oko osi x i 3. obujam tijela, koji nastane rotacijom istoga kružnog isječka oko osi x!

6. *gimn. Zagreb*

19. 1. Pravac $5y - 3x = 25$ zajednička je tangenta elipse i konfokalne parabole. Pod kojim se kutom iz zajedničkog žarišta vidi dio tangente između dirališta elipse i parabole?

20. 2. Puni kut razdijeljen je zrakama iz vrha u 18 jednakih kutova. Iz točke na prvoj zraci, koja je udaljena iz vrha za $d = 5$ *cm*, povučena je normala na drugu zraku. Iz nožišta ove normale povučena je normala na treću zraku i tako se produžuje u beskonačnost. Kolika je dužina ove izlomljene crte?

21. 3. Oko istokračnog trokuta opisana je kružnica i na nju povučena tangenta paralelno s visinom, koja pripada bazi. Odredi volumen rotacionog tijela, koje nastaje rotacijom trokuta oko spomenute tangente, ako je zadano $a = 10$ *cm*, $b = 13$ *cm*.

7. *gimn. Zagreb*

22. 1. Prvi član aritmetičkog niza jednak je kvocijentu geometrijskog niza, a prvi član geometrijskog niza jednak je diferenciji aritmetičkog. Kako glase oba niza, ako je zbroj prvih 10 članova aritmetičkog niza 155, a zbroj prvih dvaju članova geometrijskog niza 9? Koliko članova aritmetičkog niza, kome su članovi cijeli brojevi, treba zbrojiti, da bi suma bila šest puta veća od sume prvih triju članova geometrijskog niza?

23. 2. Uspravni valjak i uspravni stožac imaju jednaku visinu ($v = 8$ *cm*). Izračunaj polumjere njihovih baza znajući da su im jednaki i volumeni i oplošja! Koliki je volumen?

24. 3. Jedna stranica istostranog trokuta leži na osi ordinata i njene su krajnje točke ishodišta i točka ordinate 4. Trećim vrhom tog trokuta prolazi elipsa, kojoj je glavna os tri puta veća od stranice trokuta. Pod kojim se kutom sijeku elipsa i parabola, koja prolazi istim vrhom i kojoj je tjeme u ishodištu?

8. *gimn. Zagreb*

25. 1. Prvi član beskonačnog geometrijskog reda je veći korijen, a treći član je manji korijen sistema jednakosti

$$x^3 + y^3 = 35$$
$$2^{x+y} + 2^{x+y+1} + 2^{x+y+2} = 224.$$

Neka se odredi suma toga beskonačnog reda.

26. 2. Stranice se trokuta odnose kao 3:5:6, a zbroj njihovih kvadrata je 280. Neka se odredi oplošje tijela, koje nastaje rotacijom trokuta oko najveće stranice i radius kugle, kojoj je volumen jednak volumenu toga rotacionog tijela.

27. 3. U presječnim točkama pravca $2x + y - 12 = 0$ i parabole $y^2 = 4x$ povučene su tangente na parabolu. Neka se odredi

a) kut između tangenata,

b) jednadžba kružnice, koja prolazi diralištima tih tangenata i njihovim sjecištem,

c) kut pod kojim se sijeku kružnica i parabola.

9. *gimn. Zagreb*

Vježbe iz matematike za učenike viših razreda gimnazije

Broj korijena kvadratne jednadžbe između zadanih brojeva α i β

U mnogim zadacima iz planimetrije, stereometrije, trigonometrije, analit. geometrije kadšto je vrlo važno odrediti, za koje vrijednosti parametra, koji dolazi u kvadratnoj jednadžbi, koja rješava zadatak, kvadratna jednadžba ima jedan ili oba korijena između zadanih brojeva α i β. Ako to ne odredimo, zadatak se ne može smatrati riješenim.

Već smo u godištu 4. našeg lista broj 4 strana 148—149 našli da kvadratna jednadžba $ax^2+bx+c=0$ ima samo jedan korijen između α i β, ako je $f(\alpha)f(\beta)<0$; ona ima oba korijena između α i β, ako je ispunjeno ovih 5

1) $D \geqq 0$, 2) $af(\alpha)>0$, 3) $af(\beta)>0$, 4 i 5) $\alpha < \frac{S}{2} < \beta$, gdje D znači diskriminantu, S zbroj korijena kvadratne jednadžbe. Uvjete 4 i 5 može, kako se lako pokazuje, zamijeniti samo jedan uvjet $f'(\alpha)f'(\beta)<0$, gdje je $f'(x)=2ax+b$.

Sad ćemo pokazati jednu sasvim drugu metodu, kojom se taj zadatak može rješiti.

Stavimo $y=\frac{x-\alpha}{\beta-x}$; desna strana ove jednadžbe ima isti znak kao $(x-\alpha)(\beta-x)$, dakle je ona pozitivna, kad je x sadržano u intervalu α, β, negativna, kad je x izvan intervala α, β. Prema tomu naš zadatak da se odredi broj korijena zadane jednadžbe sadržanih između α i β sveden je na zadatak, koliko transformirana jednadžba ima pozitivnih korijena. Pitanje, kolika neka kvadratna jednadžba ima pozitivnih korijena, lako je riješiti. Kvadratna jednadžba ima samo 1 pozitivni korijen, ako je umnožak njezinih korijena negativan, ona ima oba pozitivna korijena, ako su ispunjeni uvjeti.

1) $D \geqq 0$, 2) $S>0$, 3) $P>0$ (P znači produkt korijena.)

Kako se radi, razabrat ćemo najzgodnije na ovom primjeru: neka se odredi, za koje vrijednosti od m ima jednadžba

$$(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$$

α) samo jedan, β) oba korijena između -1 i $+1$?

Stavimo $y=\frac{x+1}{1-x}$, odatle izlazi $x=\frac{y-1}{y+1}$; uvrstimo li tu vrijednost mjesto x u zadanu jednadžbu, imamo

$$(2m-3)\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2-2m\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+m-2=0$$

ili $(m-5)y^2-2(m-1)y+5(m-1)=0$.

Ta jednadžba ima samo jedan pozitivni korijen, ako je $(m-1)(m-5)<0$ t. j. za

$$1<m<5.$$

Ona ima oba korijena pozitivna, ako je 1) $D \geqq 0$, 2) $S>0$, 3) $P>0$. Kako je $D=(m-1)^2-5(m-1)(m-5)$, to je $D \geqq 0$ za $(m-1)(m-1-5m+25) \geqq 0$ ili za $(m-1)(-4m+24) \geqq 0$, t. j. za $(m-1)(m-6) \leqq 0$, dakle za $1<m<6$; $S>0$ za $(m-1)(m-5)>0$ t. j. za $-\infty<m<1$, $5<m<\infty$; $P>0$ za $(m-1)(m-5)>0$ t. j. za iste vrijednosti od m; sva su 3 uvjeta ispunjena dakle za $5<m<6$.

Tako na pr. za $m=5{,}5$ zadana jednadžba poprima oblik $8x^2-11x+3{,}5=0$, kojoj su korijeni $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{7}{8}$, dakle su oba sadržana između -1 i $+1$, dok na pr. za $m=3$ ona prelazi u jednadžbu $3x^2-6x+1=0$, a korijeni jesu $x_1 \approx 0{,}18$, $x_2 \approx 1{,}82$, te je samo x_1 sadržano između -1 i $+1$.

Riješi na taj način zadatak 149, koji je na str. 149. riješen prvom metodom.

Vježbe za niži tečajni ispit

Sistem linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice

1. Riješi sistem:

$$\frac{3x-2y+12}{6}-\frac{4x+2y-12}{18}=-2,$$
$$\frac{2x+3y-18}{15}-\frac{-2x+3y+6}{18}=2.$$

Množenjem prve jednadžbe s 18, druge s 90 i uređenjem dobivenih jednadžbi izlazi:

$$5x-8y=-84,$$
$$22x+3y=318.$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo s 3, drugu s 8, izlazi $191x=2292$, $x=12$; uvrštavanjem ove vrijednosti u prvu izlazi $-8y=-144$, $y=18$.

2. Riješi sistem

$$\frac{2}{x-4}+\frac{3}{y-3}=2,\quad \frac{4}{x-4}-\frac{9}{y-3}=-1.$$

Zadatak se može riješiti uvođenjem novih nepoznanica; stavi $\frac{1}{x-4}=u$, $\frac{1}{y-3}=v$, pa je $2u+3v=2$, $4u-9v=-1$; odatle se

dobiva $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{3}$ i $\frac{1}{x-4} = \frac{1}{2}$, $x = 6$, $\frac{1}{y-3} = \frac{1}{3}$, $y = 6$.

Linearna funkcija

3. Odredi linearnu funkciju, koja za $x = -2$ poprima vrijednost -10, a za $x = 3$ vrijednost 5.

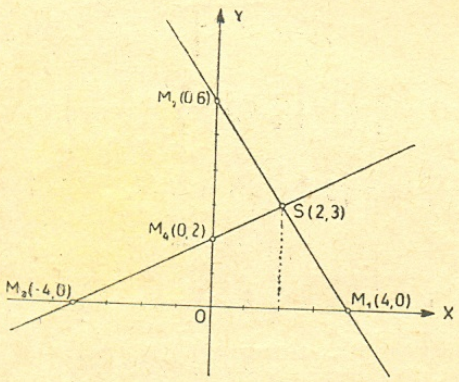
Opći je oblik linearne funkcije $y = ax + b$; budući da ona za $x = -2$ poprima vrijednost -10, mora biti $-10 = -2a + b$; kako za $x = 3$ poprima vrijednost 5, mora biti $5 = 3a + b$; dakle je $-15 = -5a$, $a = 3$, $b = 5 - 9 = -4$, pa je tražena linearna funkcija $y = 3x - 4$.

4. Odredi isto tako linearnu funkciju, koja za *a)* $x = -3$ poprima vrijednost 12, a za $x = 4$ vrijednost -2 (izlazi slično kao gore $y = -2x + 6$); *b)* za $x = 2$ poprima vrijednost 5, a za $x = -4$ vrijednost 2 (izlazi $y = \frac{1}{2}x + 4$).

5. Riješi grafički sistem:

$$3x + 2y - 12 = 0, \quad x - 2y + 4 = 0.$$

Treba da najprije nacrtamo pravce dane tim jednadžbama. Najzgodnije je, da odredimo točke, u kojima ti pravci sijeku koordinatne



osi; stavimo li u jednadžbu prvog pravca $y = 0$ izlazi $x = 4$; stavimo li $x = 0$, izlazi $y = 6$; dakle prvi pravac ide točkama $M_1(4,0)$ i $M_2(0,6)$; slično drugi pravac ide točkama $M_3(-4,0)$ i $M_4(0,2)$. Oba se pravca sijeku u $S(2,3)$, što znači, da je $x=2$, $y=3$ rješenje.

Problemi 1. stepena

1. Koliko se bakra mora izlučiti iz 720 *g* srebra čistine 0,800, da se dobije srebro čistine 0,900?

Ukupna množina čistog srebra prije legiranja mora biti jednaka ukupnoj množini čistog srebra poslije legiranja. Ako je tražena količina $x\,g$, mora biti

$$x \cdot 0 + 720 \cdot 0{,}800 = (720 - x) \cdot 0{,}900$$

ili $720 \cdot 8 = (720 - x) \cdot 9$, $-9x = -720$, $x = 80g$

2. Iz dviju vrsti srebra, od kojih je prva čistine 0,650, druga 0,900 treba staliti 10 *kg* srebra čistine 0,800. Koliko treba uzeti svake vrste?

Izlaze ove jednadžbe $x + y = 10$,

$$x \cdot 0{,}650 + y \cdot 0{,}900 = 10 \cdot 0{,}800,$$

odakle se dobiva $x = 4$ *kg*, $y = 6$ *kg*.

3. Od dva radnika, koji rade zajedno, drugi je bolji pa zaradi na dan $\frac{4}{3}$ zarade prvoga. Nakon određenog vremena drugi je zaradio 10 000 *Din*, a prvi, koji je radio 5 dana manje, dobio je 6 000 *Din*. Koliko je svaki od njih zaradio na dan?

Neka je prvi zaradio x *Din*, a drugi y *Din* na dan! Prema zadatku je $y = \frac{4}{3}x$; broj radnih dana prvoga je $\frac{6000}{x}$, a drugoga $\frac{10000}{y} = \frac{6000}{x} + 5$. Supstitucijom prelazi druga jednadžba u $\frac{30000}{4x} = \frac{6000}{x} + 5$. Odatle je $x = 300$ *Din*, $y = 400$ *Din*.

4. Kod koje je temperature zbroj stupnjeva po Celziusu i Réaumuru jednak 36?

Ako je tražena temperatura $x\,°C$, a $y\,°R$, onda je prema zadatku $x + y = 36$; osim toga je $x : y = 5 : 4$. Odatle je $x=20$, $y=16$.

5. Kruna kralja Hierona težila je zraku 10 *kg*, a u vodi $9\frac{3}{8}$ *kg*. Koliko je *kg* zlata, a koliko srebra bilo u njoj? (Tu je zadaću prvi riješio Arhimed).

Ako je u kruni bilo x *kg* zlata, a y *kg* srebra, onda je $x + y = 10$, a prema Arhimedovu zakonu zbroj volumena zlata i volumena srebra u kruni jednak je po broju gubitku težine krune u vodi, t. j. $\frac{x}{19{,}2} + \frac{y}{10{,}5} = \frac{5}{8}$. gdje su 19,2 i 10,5 brojevi spec. težina zlata i srebra.

Izlazi: $x = 7{,}585$ *kg*, $y = 2{,}415$ *kg*.

Zadaci iz geometrije

1. Oko uspravna valjka stranice $s = 16$ *cm*, promjera osnovke $2r = 12$ *cm* opisana je kugla; koliko je njezino oplošje i obujam?

Dijagonala pravokutnika (nacrtaj sliku!), koji je presjek valjka po osi, jest

$$\sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20\ cm;$$

kako je dijagonala jednaka promjeru oko valjka opisane kugle, to je polumjer kugle $r_1 = 10\ cm$, oplošje $O = 4r_1^2\pi = 4 \cdot 10^2\pi = 400\pi\ cm^2$, a obujam

$$V = \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot 10^3\pi = \frac{4000}{3}\pi\ cm^3.$$

2. Koliko je oplošje i obujam uspravna stošca, komu je stranica $s = 25\ cm$, a visina $v = 24\ cm$?

Treba izračunati najprije polumjer osnovke; on je

$$r = \sqrt{s^2 - v^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{49 \cdot 1} = 7\ cm,$$

pa je

$$O = r\pi(r + s) = 7\pi(7 + 25) = 224\pi\ cm^2,$$

$$V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{49\pi \cdot 24}{3} = 49\pi \cdot 8 = 392\pi\ cm^3.$$

3. Težina je šuplje kugle od željeza

$$\left(s = 7{,}2\ \frac{g}{cm^3}\right)\ 572{,}736\ g;$$

vanjski je polumjer $R = 3\ cm$; kolika je debljina stijene?

Treba najprije odrediti unutarnji polumjer.

Nalazimo $\frac{4}{3}(3^3 - r^3)\pi \cdot 7{,}2 = 572{,}736$ ili

$$4(27 - r^3) \cdot \pi \cdot 2{,}4 = 572{,}736.$$

$$27 - r^3 = \frac{572{,}736}{12{,}56 \cdot 2{,}4} = 19,$$

Zato je $r^3 = 8$, $r = \sqrt[3]{8} = 2$ i debljina stijene $d = R - r = 1\ cm$.

4. Istostraničan trokut stranice a, komu je upisan i opisan krug, vrti se oko jedne svoje visine. Kako se odnose *a*) oplošje, *b*) obujmovi rotacionih tijela?

Polumjer upisanog kruga je

$$\rho = \frac{1}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3},$$

a opisanog kruga

$$r = \frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3};$$

polumjer baze istostraničnog stošca, što je opisuje istostranični trokut, jest $\frac{a}{2}$. Ako je oplošje stošca O_1, oplošje upisane kugle O_2, opisane kugle O_3, to je

$$O_1 = \frac{a}{2}\pi\left(\frac{a}{2} + a\right) = \frac{3a^2}{4}\pi,$$

$$O_2 = 4\left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2\pi = \frac{a^2}{3}\pi,$$

$$O_3 = 4\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2\pi = \frac{4a^2}{3}\pi.$$

Dakle je

$$O_1 : O_2 : O_3 = \frac{3}{4}a^2\pi : \frac{a^2}{3}\pi : \frac{4a^2}{3}\pi =$$

$$= \frac{3}{4} : \frac{1}{3} : \frac{4}{3} = 9 : 4 : 16.$$

Za obujmove imamo:

$$V_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^3\pi\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24},$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^3\pi = \frac{a^3}{54}\sqrt{3}\pi,$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^3\pi = \frac{4a^3}{27}\pi\sqrt{3},\ \text{pa je}$$

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{24} : \frac{1}{54} : \frac{4}{27} = 9 : 4 : 32.$$

5. Izračunaj oplošje i obujam oko pravilne trostrane piramide osnovnog brida $a = 6\ cm$, visine $2\ cm$ opisanog stošca.

Oplošje je stošca $O = r\pi(r + s)$, $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$,

$$s = \sqrt{v^2 + r^2} = \sqrt{v^2 + \frac{a^2}{3}};\ \text{zato je}$$

$$O = \frac{a}{3}\sqrt{3}\pi\left(\frac{a}{3}\sqrt{3} + \sqrt{v^2 + \frac{a^2}{3}}\right) =$$

$$= \frac{a\pi}{3}(a + \sqrt{3v^2 + a^2}) = 4\pi(3 + 2\sqrt{3}) =$$

$$= 81{,}188\ cm^2.$$

$$V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{a^2}{9}3 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot v = \frac{a^2\pi v}{9} =$$

$$= \frac{36\pi \cdot 2}{9} = 8\pi = 25{,}12\ cm^3.$$

6. Izračunaj oplošje i obujam tijela, što ga izvodi istostraničan trokut ABC, koji se vrti oko osi, koja je povučena vrhom C paralelno s bazom AB.

Oplošje je jednako plaštu valjka polumjera osnovke $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, a visine a uvećanu za 2 plašta uspravna stošca polumjera osnovke $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ i stranice a dakle

$$O = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot a\pi + 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot a\pi = 2a^2\sqrt{3}\pi;$$

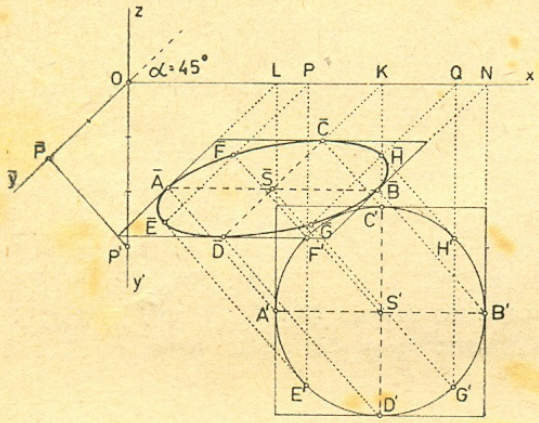
obujam je jednak obujmu valjka umanjenu za 2 obujma stošca, t. j.

$$V = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \pi a - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \pi \cdot \frac{a}{2} =$$

$$= 3\frac{a^3}{4}\pi - \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{4} \cdot 3\pi \cdot \frac{a}{2} =$$

$$= 3\frac{a^3\pi}{4} - \frac{a^3\pi}{4} = \frac{a^3\pi}{2}.$$

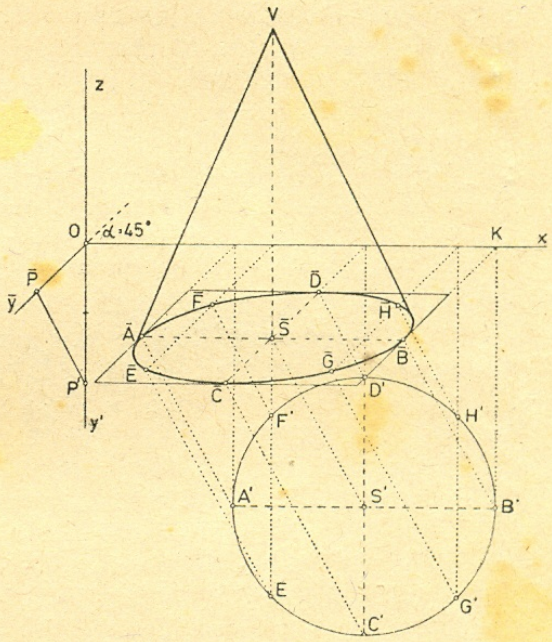
7. Nacrtaj kosu projekciju kružnice $\alpha = 45°$, $\left(n = \frac{2}{3}\right)$, koja je u ravnini xy.



Najprije smo nacrtali kosu projekciju triju osi x, y, z, zatim smo okrenuli ravninu xy oko osi x u ravninu slike i napokon smo konstruirali odredbeni trokut $OP'\overline{P}$. U preloženoj smo kružnici povukli 2 među sobom okomita promjera $A'B' \parallel x$ i $C'D' \perp x$, pa smo s pomoću odredbenog trokuta odredili kosu projekciju $\overline{A}\overline{B}$ i $\overline{C}\overline{D}$. Dužina $\overline{A}\overline{B}$ je prava veličina promjera AB. Također smo povukli 2 paralelne tetive $E'F'$ i $G'H'$ i odredili kose projekcije $\overline{E'F'}$ i $\overline{G'H'}$. Dobivene smo točke spojili i dobili *elipsu* kao kosu projekciju kružnice. Točka S je središte elipse. Dužine $\overline{A}\overline{B}$ i $\overline{C}\overline{D}$ jesu promjeri elipse.

Svaka 2 promjera kružnice, koja su među sobom okomita, zovu se *konjugirani promjeri* te kružnice. Promjeri $A'B'$ i $C'D'$ jesu dva konjugirana promjera kružnice. Kose projekcije tih promjera jesu promjeri elipse i to 2 konjugirana promjera elipse. Ako krajnjim točkama tih promjera povučemo usporednice s istim promjerima, dobivamo romboid koji dotiče elipsu u krajnjim točkama tih promjera.

Taj je romboid kosa projekcija kvadrata, koji je opisan kružnici, te su mu stranice usporedne s promjerima AB i CD.



8. Nacrtaj kosu projekciju uspravnog stošca $(\alpha = 45°,\ n = \frac{1}{2})$.

Najprije nacrtaj kosu projekciju osnovnog kruga, zatim u središtu S elipse povuci usporednicu sa osi z i na nju prenesi visinu stošca u pravoj veličini i s vrha V povuci tangente na elipsu.

Broj pretplatnika na Mat. fiz. list na pojedinim školama 1954./55.

1. *Aleksinac*, g. (20); 2. *Aranđelovac*, g. (30); 3. *Arbanasi*, osm. šk. (49); 4. *Bač. Palanka*, g. (105); 5. *Bač. Petrovac*, g. (35); 6. *Banatsko V. Selo*, osm. šk. (4); 7. *Banja Luka*, 1. g. (50); 2. g. (6); 3. osm. šk. (10); šk. (20); 8. *Bata*, osm. šk. (2); 9. *Bečej*; g (33); 10 *Bela Palanka*, g. (22); 11. *Beograd*, 1. g. (24); 2. g. (68); 5. g. (9); 6. g. (33); 7. g. (152); 8. g. (21); 9. g. (94); 10. g. (3); 11. g. (112); 12. g. (20); 13. g. (72); 14. g.